FOGLIO DI ESERCIZI 1: SPAZI VETTORIALI, SOTTOSPAZI E SOMME DIRETTE

ESERCIZIO 1

Sia F un campo. Dimostrare che:

(i) $F[X]$ è isomorfo a F^∞;
(ii) $F[X]_{\leq n}$ è isomorfo a F^{n+1};
(iii) Se S e T sono due insiemi della stessa cardinalità allora
  (a) F^S è isomorfo a F^T;
  (b) $F^{(S)}$ è isomorfo a $F^{(T)}$.

ESERCIZIO 2

Sia V un F-spazio vettoriale e si considerino tre sottospazi S, T e U.

(i) Mostrare che
$$U \cap (S+T) \supseteq (U \cap S) + (U \cap T)$$
e vale l'uguale se $U \supseteq S$ oppure $U \supseteq T$.
(ii) Mostrare che
$$U + (S \cap T) \subseteq (U+S) \cap (U+T)$$
e vale l'uguale se $U \subseteq S$ oppure $U \subseteq T$.
(iii) Dare esempi in $\mathbb{R}^2$ di sottospazi S, T, U per cui non valgono le uguaglianze nel punto (i) e (ii).

ESERCIZIO 3

Sia V uno spazio vettoriale e siano S, T due sottospazi. Dimostrare che
$$S \cup T \text{ è un sottospazio di } V \iff S \subseteq T \text{ o } T \subseteq S.$$

ESERCIZIO 4

Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{S_i\}_{i\in I}$ una collezione di sottospazi vettoriali di V.
Dimostrare che se per ogni S_i e S_j esiste un S_k tale che $S_i \cup S_j \subseteq S_k$ allora $\bigcup_{i\in I} S_i$ è un sottospazio vettoriale di V.

ESERCIZIO 5

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Si diano esempi di:

(i) un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ che è un sottogruppo di $(\mathbb{R}^2, +, 0)$ ma non è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari (e dunque non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$).
(ii) un sottoinsieme B di $\mathbb{R}^2$ che è chiuso rispetto alla moltiplicazione scalare ma non rispetto all'addizione vettoriale (e dunque non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$).

ESERCIZIO 6

Sia V uno spazio vettoriale.

(i) Dimostare che l'operazione $\cap$ sull'insieme dei sottospazi è associativa, commutativa ed ammette un elemento neutro (chi è l'elemento neutro?). Caratterizzare i sottospazi che hanno un inverso rispetto a $\cap$. Dimostrare o dare un controesempio per la legge di cancellazione:
$$S_1 \cap T = S_2 \cap T \Rightarrow S_1 = S_2.$$

(ii) Dimostare che l'operazione $+$ sull'insieme dei sottospazi è associativa, commutativa ed ammette un elemento neutro (chi è l'elemento neutro?). Caratterizzare i sottospazi che hanno un inverso rispetto a $+$. Dimostrare o dare un controesempio per la legge di cancellazione:

$$S_1 + T = S_2 + T \Rightarrow S_1 = S_2.$$

ESERCIZIO 7

Sia V uno spazio vettoriale e S un sottoinsieme non vuoto. Dimostrare che S è un sottospazio di V se e solo se per ogni $v_1, \ldots, v_n \in S$ e per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ abbiamo che

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n \in S.$$

ESERCIZIO 8

Trovare esempi di sottospazi S, U, V di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$S \oplus^{\text{int}} U = S \oplus^{\text{int}} V \quad \text{e} \quad U \neq V.$$

ESERCIZIO 9

Trovare tre sottospazi S, U, V di $\mathbb{R}^3$ tali che $S \cap U = U \cap V = S \cap V = \{0\}$ ma tali che la somma $S + U + V$ non è diretta.

ESERCIZIO 10*

Dimostrare che uno spazio vettoriale V non banale sopra un campo F con q elementi non è unione di q sottospazi vettoriali propri. In particolare, se F è infinito allora un F-spazio vettoriale non è unione di un numero finito di sottospazi vettoriali propri.

[Soluzione: Si veda Teorema 4.3.8 delle note di M. Manetti.]

ESERCIZIO 11*

Sia F un campo finito con q elementi e sia $n \geq 1$. Dimostrare che K^n è unione di $q+1$ sottospazi vettoriali propri.

[Soluzione: Si veda l'Esercizio 196 delle note di M. Manetti e la sua soluzione.]