# FOGLIO DI ESERCIZI 10: DECOMPOSIZIONE PRIMARIA E AUTOVALORI

**ESERCIZIO 1** (parzialmente svolto a lezione...repetita iuvant!)

Sia $J_{\underline{m}}(\lambda) := \operatorname{diag}(J_{m_1}(\lambda), \ldots, J_{m_r}(\lambda))$ il *multiblocco di Jordan* di autovalore $\lambda \in F$ e partizione $\underline{m} = \{m_1 \geq \ldots \geq m_r \geq 1\}$.

(i) Dimostrare che il polinomio caratteristico di $J_{\underline{m}}(\lambda)$ è $\chi_{J_m(\lambda)}(x) = (x - \lambda)^{|\underline{m}|}$, dove $|\underline{m}| := \sum_i m_i$. In particolare, $\lambda$ é l'unico autovalore di $J_{\underline{m}}(\lambda)$.

(ii) Dimostrare che il polinomio minimo di $J_{\underline{m}}(\lambda)$ è $\mu_{J_m(\lambda)}(x) = (x - \lambda)^{m_1}$.

(iii) Consideriamo lo spazio vettoriale numerico $F^{|\underline{m}|}$ e denotiamo gli elementi della base canonica nel seguente modo:

$$\{e^1_1, \ldots, e^1_{m_1}, e^2_1, \ldots, e^2_{m_2}, \ldots, e^r_1, \ldots, e^r_{m_r}\}.$$

Dimostrare che per ogni $k \geq 1$, gli autospazi di indice $k$ relativi all'autovalore $\lambda$ sono dati da

$$\mathcal{E}^k_\lambda(J_{\underline{m}}(\lambda)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle e^i_{m_i - \min\{k, m_i\}+1}, \ldots, e^i_{m_i} \rangle$$

In particolare, abbiamo che

$$\dim \mathcal{E}^k_\lambda(J_{\underline{m}}(\lambda)) = \sum_{i=1}^{r} \min\{k, m_i\}.$$

**ESERCIZIO 2**

Per ciascuna matrice $A_i \in M_4(\mathbb{C})$ dell'Esercizio 4 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Phi_i := \Phi_{A_i} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^4)$.

Per ciascun $\Phi_i$:

(i) Determinare la decomposizione primaria di $\mathbb{C}^4$ rispetto a $\Phi_i$.

(ii) Per ciascun autovalore di $\Phi_i$, calcolare gli autospazi generalizzati corrispondenti.

**ESERCIZIO 3**

Per ciascuna matrice $B_i \in M_4(\mathbb{Q})$ dell'Esercizio 5 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Psi_i := \Phi_{B_i} \in \operatorname{End}(\mathbb{Q}^4)$.

Per ciascun $\Psi_i$:

(i) Determinare la decomposizione primaria di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a $\Psi_i$.

(ii) Per ciascun autovalore di $\Psi_i$, calcolare gli autospazi generalizzati corrispondenti.

**ESERCIZIO 4**

Per ciascuna matrice $C_i \in M_4(\mathbb{R})$ dell'Esercizio 6 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Pi_i := \Phi_{C_i} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$.

Per ciascun $\Pi_i$:

(i) Determinare la decomposizione primaria di $\mathbb{R}^4$ rispetto a $\Pi_i$.

(ii) Per ciascun autovalore di $\Pi_i$, calcolare gli autospazi generalizzati corrispondenti.

**ESERCIZIO 5**

Per ciascuna matrice $C_i \in M_4(\mathbb{C})$ dell'Esercizio 7 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Lambda_i := \Phi_{C_i} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^4)$.

Per ciascun $\Lambda_i$:

(i) Determinare la decomposizione primaria di $\mathbb{C}^4$ rispetto a $\Lambda_i$.

(ii) Per ciascun autovalore di $\Lambda_i$, calcolare gli autospazi generalizzati corrispondenti.

**ESERCIZIO 6**

Siano $\lambda, \mu, \nu$ tre elementi (non necessariamente a due a due distinti) di un campo $F$ e si consideri l'operatore $\Phi \in \mathrm{End}(F^2)$ la cui matrice canonica é

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che:

(1) Il polinomio caratteristico di $\Phi$ é:
$$\chi_\Phi(x) = (x - \lambda)(x - \mu).$$

(2) Il polinomio minimo di $\Phi$ é uguale a:
$$\mu_\Phi(x) = \begin{cases} (x-\lambda)(x-\mu) & \text{se } \lambda \neq \mu \text{ oppure } \nu \neq 0, \\ (x-\lambda) & \text{se } \lambda = \mu \text{ e } \nu = 0. \end{cases}$$

(3) Il sottospazio $\Phi$-invariante $\langle e_1 \rangle$ non ha un complementare $\Phi$-invariante se e solo $\mu = \lambda$ e $\nu \neq 0$.

(4) Se $\lambda \neq \mu$ allora
$$\mathcal{E}_\lambda(\Phi) = \mathcal{E}_\lambda^\infty(\Phi) = \langle e_1 \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_\mu(\Phi) = \mathcal{E}_\mu^\infty(\Phi) = \langle \nu e_1 + (\mu - \lambda) e_2 \rangle.$$

(5) Se $\lambda = \mu$ e $\nu = 0$ allora
$$\mathcal{E}_\lambda(\Phi) = \mathcal{E}_\lambda^\infty(\Phi) = F^2.$$

(6) Se $\lambda = \mu$ e $\nu \neq 0$ allora
$$\mathcal{E}_\lambda(\Phi) = \langle e_1 \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_\lambda^2(\Phi) = \mathcal{E}_\lambda^\infty(\Phi) = F^2.$$

**ESERCIZIO 7**

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ e sia $\mu_\Phi(x) = p_1(x)^{e_i} \dots p_r(x)^{e_r}$ la fattorizzazione del suo polinomio minimo in irriducibili. Si consideri la decomposizione primaria di $V$ rispetto a $\Phi$:
$$V = V_\Phi(p_1) \oplus^{\mathrm{int}} \dots \oplus^{\mathrm{int}} V_\Phi(p_r).$$
Sia $U \leq V$ un sottospazio $\Phi$-invariante. Si mostri che
$$U = (U \cap V_\Phi(p_1)) \oplus^{\mathrm{int}} \dots \oplus^{\mathrm{int}} (U \cap V_\Phi(p_r)).$$

**ESERCIZIO 8**

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ e sia $v \neq 0$ un autovettore di $\Phi$ con autovalore $\lambda \in F$. Dimostare che:

(i) Se $\Phi$ è invertibile, allora $v$ è un autovettore di $\Phi$ relativo a $\lambda^{-1}$.

(ii) Per ogni polinomio $p(x) \in F[x]$, $v$ è un autovettore di $p(\Phi)$ relativo a $p(\lambda)$.

**ESERCIZIO 9**

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ e siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ autovettori di $\Phi$ rispetto ad autovalori $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ a due a due distinti. Dimostrare che $\{v_1, \dots, v_k\}$ sono linearmente indipendenti.