FOGLIO DI ESERCIZI 11: POLINOMI MINIMI DI VETTORI (RISPETTO AD UN OPERATORE) E OPERATORI CICLICI

ESERCIZIO 1

Si consideri il blocco di Jordan $J_m(\lambda)$ con autovalore λ di ordine m. Sia $\{e_1, \ldots, e_m\}$ la base canonica di F^m. Dimostrare che il polinomio minimo di e_i rispetto a $J_m(\lambda)$ è

$$\mu_{e_i, J_m(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^{m+1-i} \text{ per ogni } 1 \leq i \leq m.$$

In particolare $J_m(\lambda)$ è ciclica con vettore generatore e_1.

ESERCIZIO 2

Per ciascuna matrice $A_i \in M_4(\mathbb{C})$ dell'Esercizio 4 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Phi_i := \Phi_{A_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$. Si consideri il vettore e_1 della base canonica.

(i) Si calcoli $\mu_{e_1,\Phi_i}(x)$.
[Soluzione: $\mu_{e_1,\Phi_1}(x) = x^4$; $\mu_{e_1,\Phi_2}(x) = x^3$; $\mu_{e_1,\Phi_3}(x) = \mu_{e_1,\Phi_4}(x) = x^2$.]

(ii) Si trovi una base del sottospazio $\langle \Phi_i, e_1 \rangle$.

ESERCIZIO 3

Per ciascuna matrice $B_i \in M_4(\mathbb{Q})$ dell'Esercizio 5 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Psi_i := \Phi_{B_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^4)$. Si consideri il vettore e_1 della base canonica.

(i) Si calcoli $\mu_{e_1,\Psi_i}(x)$.
[Soluzione: $\mu_{e_1,\Psi_1}(x) = x^3$; $\mu_{e_1,\Psi_2}(x) = \mu_{e_1,\Psi_4}(x) = x^2$; $\mu_{e_1,\Psi_3}(x) = \mu_{e_1,\Psi_5}(x) = \mu_{e_1,\Psi_6}(x) = x$.]

(ii) Si trovi una base del sottospazio $\langle \Psi_i, e_1 \rangle$.

ESERCIZIO 4

Per ciascuna matrice $C_i \in M_4(\mathbb{R})$ dell'Esercizio 6 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Pi_i := \Phi_{C_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$. Si consideri i due vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Si calcolino $\mu_{v_1,\Pi_i}(x)$ e $\mu_{v_2,\Pi_i}(x)$.
[Soluzione: $\mu_{v_1,\Pi_1}(x) = (x^2+1)^2$ e $\mu_{v_2,\Pi_1}(x) = x^2+1$; $\mu_{v_1,\Pi_2}(x) = \mu_{v_2,\Pi_2}(x) = x^2+1$; $\mu_{v_1,\Pi_3}(x) = x^2+1$ e $\mu_{v_2,\Pi_3}(x) = x^2+x+1$; $\mu_{v_1,\Pi_4}(x) = x^2+1$ e $\mu_{v_2,\Pi_4}(x) = x^2$; $\mu_{v_1,\Pi_5}(x) = x^2+1$ e $\mu_{v_2,\Pi_5}(x) = x$; $\mu_{v_1,\Pi_6}(x) = x^2+1$ e $\mu_{v_2,\Pi_6}(x) = x$.]

(ii) Si trovino delle basi dei due sottospazi $\langle \Pi_i, v_1 \rangle$ e $\langle \Pi_i, v_2 \rangle$.

ESERCIZIO 5

Per ciascuna matrice $C_i \in M_4(\mathbb{C})$ dell'Esercizio 7 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Lambda_i := \Phi_{C_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$.

(i) Si considerí i due vettori di $\mathbb{C}^4$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e si calcoli $\mu_{v_1,\Lambda_i}(x)$ e $\mu_{v_2,\Lambda_i}(x)$.

(ii) Per ciascun Λ_i, si trovino due vettori w_1 e w_2 tale che $\mu_{w_1,\Lambda_i}(x) = x+i$ e $\mu_{w_2,\Lambda_i}(x) = x-i$.

[Suggerimento: si considerino degli opportuni vettori $w_1, w_2 \in \langle \Lambda_i, v_1 \rangle$.]

ESERCIZIO 6

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ un operatore ciclico. Dimostrare che la biezione (vista a lezione)

$$\{\text{Sottospazi } \Phi\text{-invarianti}\} \xrightarrow{\cong} \left\{\text{Divisori di } \mu_{\Phi|W}\right\}$$
$$W \leq V \mapsto \mu_{\Phi_{|W}}$$

è tale che $W_1 \subseteq W_2$ se e solo se $\mu_{\Phi|W_1} | \mu_{\Phi|W_2}$. In particolare:

- $\mu_{\Phi|(W_1 \cap W_2)} = \mathrm{mcd}(\mu_{\Phi|W_1}, \mu_{\Phi|W_2})$,
- $\mu_{\Phi|(W_1 + W_2)} = \mathrm{mcm}(\mu_{\Phi|W_1}, \mu_{\Phi|W_2})$,

per ogni $W_1, W_2 \leq V$ sottospazi Φ-invarianti.

ESERCIZIO 7

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ un operatore ciclico. Dimostrare che Φ è indecomponibile se e solo se μ_Φ è una potenza di un polinomio irriducibile.

[Suggerimento: per l'implicazione $\Rightarrow$ usare la decomposizione primaria; per l'implicazione $\Leftarrow$ usare l'Esercizio precedente.]

ESERCIZIO 8

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ un operatore. Si considerino due vettori v_1 e v_2 tali che $\mathrm{mcd}(\mu_{\Phi,v_1}, \mu_{\Phi,v_2}) = 1$. Dimostrare che:

(i) $\langle \Phi, v_1 \rangle \oplus^{\mathrm{int}} \langle \Phi, v_2 \rangle = \langle \Phi, v_1 + v_2 \rangle$.

(ii) $\mu_{\Phi,v_1+v_2} = \mu_{\Phi,v_1} \cdot \mu_{\Phi,v_2}$.

[Suggerimento:

- dimostrare che $\langle \Phi, v_1 \rangle \cap \langle \Phi, v_2 \rangle = \{0\}$ usando $\mathrm{mcd}(\mu_{\Phi,v_1}, \mu_{\Phi,v_2}) = 1$ e Bezout.
- dimostrare che $\mu_{\Phi,v_1+v_2} | \mu_{\Phi,v_1} \cdot \mu_{\Phi,v_2}$ usando che $\langle \Phi, v_1 + v_2 \rangle \subseteq \langle \Phi, v_1 \rangle + \langle \Phi, v_2 \rangle$.
- dimostrare che $\mu_{\Phi,v_1} \cdot \mu_{\Phi,v_2} | \mu_{\Phi,v_1+v_2}$ usando che $\langle \Phi, v_1 \rangle \cap \langle \Phi, v_2 \rangle = \{0\}$ e $\mathrm{mcd}(\mu_{\Phi,v_1}, \mu_{\Phi,v_2}) = 1$.
- notare che $\langle \Phi, v_1 + v_2 \rangle \subseteq \langle \Phi, v_1 \rangle \oplus^{\mathrm{int}} \langle \Phi, v_2 \rangle$ ed hanno la stessa dimensione per quanto già mostrato.]

ESERCIZIO 9

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ un operatore e consideriamo la sua decomposizione primaria $V = V_\Phi(p_1) \oplus \ldots \oplus V_\Phi(p_r)$. Dimostrare che Φ è ciclico se e solo se $\Phi_{|V_\Phi(p_i)}$ è ciclico per ogni $1 \leq i \leq r$.

[Suggerimento: per l'implicazione $\Rightarrow$ usare il teorema sulla struttura dei sottospazi invarianti di un operatore ciclico; per l'implicazione $\Leftarrow$ usare l'Esercizio precedente.]