## FOGLIO DI ESERCIZI 12: DIVISORI ELEMENTARI, FORMA CANONICA DI JORDAN, TRIANGOLARIZZABILITÀ, DIAGONALIZZABILITÁ

**ESERCIZIO 1**

Per ciascuno degli operatori $T$ degli Esercizi 4-5-6-7 del Foglio di Esercizi 9, si dica se tale operatore è triangolarizzabile e, in caso positivo, si calcoli una base $\mathcal{B}$ tale che $M_{\mathcal{B}}(T)$ sia triangolare superiore.

**ESERCIZIO 2**

Per ciascuno degli operatori $T$ degli Esercizi 4-5-6-7 del Foglio di Esercizi 9, si dica se tale operatore è diagonalizzabile e, in caso positivo, si calcoli una base $\mathcal{B}$ tale che $M_{\mathcal{B}}(T)$ sia triangolare superiore.

**ESERCIZIO 3**

Per ciascuno degli operatori $T$ degli Esercizi 4-5-6-7 del Foglio di Esercizi 9, si dica se tale operatore ammette una forma canonica di Jordan e, in caso positivo, si calcoli una base $\mathcal{B}$ tale che $M_{\mathcal{B}}(T)$ sia in forma canonica di Jordan.

**ESERCIZIO 4**

Per ciascuno degli operatori $T$ degli Esercizi 4-5-6-7 del Foglio di Esercizi 9, si calcolino i divisori elementari di $T$.

**ESERCIZIO 5** (ALGORITMO generale per trovare la forma canonica di Jordan)

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ un operatore tale che $\chi_\Phi(x) = \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{e_i}$ dove $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ sono gli autovalori distinti di $\Phi$.

Consideriamo un autovalore $\lambda$ di $\Phi$ (e dunque $\lambda = \lambda_i$ per un certo $1 \le i \le r$) e gli autospazi generalizzati $\{\mathcal{E}^i_\lambda(\Phi)\}_{1\le i\le \mathrm{ind}(\lambda)}$.

(i) Consideriamo i seguenti numeri (per ogni $1 \le i \le \mathrm{ind}(\lambda)$):

$$\begin{cases} d_i(\lambda) := \dim \mathcal{E}^i_\lambda(\Phi), \\ d_i^{\mathrm{ex}}(\lambda) := d_i(\lambda) - d_{i-1}(\lambda), \\ d_i^{\mathrm{new}}(\lambda) := d_i^{\mathrm{ex}}(\lambda) - d_{i+1}^{\mathrm{ex}}(\lambda), \end{cases}$$

con la convenzione che $d_0(\lambda) = 0$ e $d^{\mathrm{ex}}_{\mathrm{ind}(\lambda)+1} = 0$.

Dimostrare che la partizione $\underline{m}(\lambda)$ associata a $\lambda$ nella forma canonica di Jordan di $\Phi$ è data da:

$$\underline{m}(\lambda) = (\underbrace{\mathrm{ind}(\lambda)}_{d^{\mathrm{new}}_{\mathrm{ind}(\lambda)}(\lambda)}, \ldots, \underbrace{i}_{d_i^{\mathrm{new}}(\lambda)}, \ldots, \underbrace{1}_{d_1^{\mathrm{new}}(\lambda)})$$

che il numero $i$ appare con molteplicità $d_i^{\mathrm{new}}(\lambda)$.

(ii) Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathcal{E}^i_\lambda(\Phi)$ definiti per induzione decrescente su $1 \le i \le \mathrm{ind}(\lambda)$:

$$\begin{cases} A^i_\lambda := (\Phi - \lambda\,\mathrm{Id})(N^{i+1}_\lambda), \\ N^i_\lambda \text{ un sottospazio di } \mathcal{E}^i_\lambda(\Phi) \text{ complementare di } \mathcal{E}^{i-1}_\lambda(\Phi) \oplus A^i_\lambda, \end{cases}$$

con la convezione che $N^{\mathrm{ind}(\lambda)+1}_\lambda = \{0\}$.

Dimostrare che $\dim N_\lambda^i = d_i^{\mathrm{new}}(\lambda)$ e che gli elementi di una base $\{e_1^i, \ldots, e^i_{d_i^{\mathrm{new}}(\lambda)}\}$ di $N_\lambda^i$ formano dei generatori per le componenti cicliche primarie di $\Phi$ con polinomio caratteristico $(x-\lambda)^i$.

In particolare, una base di Jordan per il multiblocco di Jordan $J_{\underline{m}(\lambda)}(\lambda)$ di $\Phi$ è data da

$$\big\{(\Phi - \lambda\,\mathrm{Id})^k(e_j^i)\big\}_{\substack{1\le i\le \mathrm{ind}(\lambda)\\ 1\le j\le d_i^{\mathrm{new}}(\lambda)\\ 0\le k\le i-1}}$$