FOGLIO DI ESERCIZI 2: INSIEMI GENERATORI, LINEARMENTE INDIPENDENTI E BASI

ESERCIZIO 1

Siano A e B due sottoinsiemi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che:

(i) $A \subseteq \langle B \rangle \Leftrightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.
(ii) $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$.

ESERCIZIO 2

Sia V un F-spazio vettoriale e sia $v \in V$.

(i) Mostrare che v è linearmente indipendente se e solo se $v \neq 0$.
(ii) Mostrare che $\langle v \rangle = \langle \lambda \cdot v \rangle$ per ogni $\lambda \in F^*$.

ESERCIZIO 3

Sia V un F-spazio vettoriale e siano u, v due vettori di V.

(i) Mostrare che $\{u, v\}$ sono linearmente dipendente se e solo se $v = \lambda \cdot u$ per qualche $\lambda \in F$ oppure $u = \lambda \cdot v$ per qualche $\lambda \in eF$.
(ii) Mostrare che $\{u, v\}$ sono linearmente indipendente se e solo se u e v sono non nulli e non paralleli (cioè non esiste nessun $\lambda \in F^*$ tale che $u = \lambda v$).
(iii) Mostrare che $\langle u, v \rangle = \langle \lambda \cdot u, \mu \cdot v + \nu \cdot u \rangle$ per ogni $\lambda, \mu \in F^*$ e $\nu \in F$.

ESERCIZIO 4

Sia $C = \{v_i \ : i \in I\}$ una collezione di vettori in uno spazio vettoriale V. Dimostrare che C è linearmente indipendente se e solo se ogni sottoinsieme finito di C è linearmente indipendente.

ESERCIZIO 5

Si consideri una collezione finita $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori in uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $\dim\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \leq n$ e vale l'uguale se e solo se i vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 6

Si consideri due collezioni finite $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ di vettori in uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ sono linearmente indipendenti e $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \cap \langle w_1, \ldots, w_m \rangle = (0)$.

ESERCIZIO 7

Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una collezione di vettori in un F-spazio vettoriale V e sia $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset F^*$ una collezione di scalari non nulli. Dimostrare:

(1) $\{\lambda_1 \cdot v_1, \ldots, \lambda_n \cdot v_n\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti.
(2) $\langle \lambda_1 \cdot v_1, \ldots, \lambda_n \cdot v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

ESERCIZIO 8

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Dimostrare che esistono n-sottospazi $\{U_1, \ldots, U_n\}$ di V di dimensione uno tale che

$$V = U_1 \oplus^{\text{int}} \ldots \oplus^{\text{int}} U_n.$$

ESERCIZIO 9

Siano $\{U_1, \ldots, U_n\}$ sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Dimostrare che

$$\dim \sum_{i=1}^{n} U_i \leq \sum_{i=1}^{n} \dim U_i,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\sum_{i=1}^{n} U_i = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$.

ESERCIZIO 10

Sia V uno spazio vettoriale e sia U un suo sottospazio. Dimostrare che esiste (non unico) un sottospazio W (chiamato un complemento di U in V) tale che

$$V = U \oplus^{\text{int}} W.$$

ESERCIZIO 11*

Sia $F = \mathbb{Z}_p$ per un certo primo p e sia $V = F^n$ per un certo $n \geq 1$. Sia $1 \leq k \leq n$.

(1) Mostrare che il numero di k-tuple di vettori linearmente indipendenti $\{v_1, \ldots, v_k\}$ in V è uguale a

$$\prod_{h=0}^{k-1} (p^n - p^h).$$

(2) Si fissi un sottospazio vettoriale W di dimensione k. Mostrare che il numero di k-tuple di vettori linearmente indipendenti $\{v_1, \ldots, v_k\}$ in W è uguale a

$$\prod_{h=0}^{k-1} (p^k - p^h).$$

(3) Dedurre, usando i punti precedenti, che il numero di sottospazi di V di dimensione k è uguale al *coefficiente Gaussiano*

$$\binom{n}{k}_p := \frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \ldots (p - 1)}{(p^k - 1)(p^{k-1} - 1) \ldots (p - 1)(p^{n-k} - 1)(p^{n-k-1} - 1) \ldots (p - 1)}.$$

ESERCIZIO 12*

Sia V uno spazio vettoriale di dimension finita sopra un campo infinito F. Siano $S_1, \ldots, S_m$ sottospazi di V della stessa dimensione. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che

$$V = S_i \oplus^{\text{int}} T \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m.$$

[Suggerimento: si usi il fatto (dimostrato nel Foglio 1 di Esercizi) che V non è l'unione di un numero finito di sottospazi propri.]

ESERCIZIO 13

Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una collezione di vettori in un F-spazio vettoriale V e siano $\lambda_{i,j} \in F$ per ogni $1 \leq i \leq j \leq n$ tale che $\lambda_{i,i} \neq 0$. Si considerino i vettori $\{w_1, \ldots, w_n\}$ definiti da:

$$w_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \lambda_{i,j} v_i \quad \text{per ogni } 1 \leq j \leq n.$$

[Si dice che i vettori $\{w_1, \ldots, w_n\}$ sono ottenuti dai vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tramite una trasformazione *diagonale*.]

Dimostrare:

(1) $\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle w_1, \ldots, w_i \rangle$ per ogni $1 \leq i \leq n$. In particolare, si ha che

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle.$$

(2) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendente se e solo se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ sono linearmente indipendenti.
(3) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono una base se e solo se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ sono una base.

ESERCIZIO 14

Sia $F \leq K$ un'estensione di campi e si consideri K come F-spazio vettoriale. Sia $\alpha \in K$. Dimostrare che gli elementi $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$ sono linearmente dipendenti (su F) se e solo se α è radice di un polinomio di grado minore o uguale a n a coefficienti in F.

ESERCIZIO 15

Sia K un campo e sia $n \geq 1$. Consideriamo la mappa

$$f : K^n \longrightarrow K^{n+1}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Siano $\{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ vettori di K^n (per un certo $p \geq 0$). Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) $\{f(v_0), f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ sono linearmente indipendenti in K^{n+1};
(ii) $\{v_1 - v_0, \ldots, v_p - v_0\}$ sono linearmente indipendenti in K^n.