FOGLIO DI ESERCIZI 3: SOTTOSPAZI DI F^n

ESERCIZIO 1

Per ciascun sottospazio $U \leq \mathbb{Q}^4$ dato come insieme di soluzioni di un sistema lineare omogeneo qua sotto elencato, si calcoli il suo insieme di soluzioni U in $\mathbb{Q}^4$ in forma parametrica e se ne determini una sua base.

(A)

$$\left\{ X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0. \right.$$

(B)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0. \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0, \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0. \end{cases}$$

(D)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0, \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0. \end{cases}$$

(E)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0, \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ 2X_1 - 3X_4 = 0. \end{cases}$$

(F)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 + 4X_4 = 0. \end{cases}$$

(G)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0, \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(H)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0, \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

Per ciascun sottospazio W di $\mathbb{Q}^4$ dato qua sotto in forma parametrica, si determini una base di W e si esprima W in forma cartesiana:

(A)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(B)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(D)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(E)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(F)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(G)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(H)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ESERCIZIO 3

Dato un sottospazio $U \leq \mathbb{Q}^4$ tra quelli dell'Esercizio 1 e un sottospazio $W \leq \mathbb{Q}^4$ tra quelli dell'Esercizio 2, si determinino:

(1) $U \cap W$ in forma cartesiana e in forma parametrica, e calcolare $\dim(U \cap W)$.
(2) $U + W$ in forma cartesiana e in forma parametrica, e calcolare $\dim(U + W)$.

ESERCIZIO 4

Per ciascun sottoinsieme C di $\mathbb{R}^4$ dato qua sotto, si determini un sottoinsieme linearmente indipendente massimale e si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$.

(A)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(B)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(C)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(D)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(E)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(F)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(G)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(H)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 5

Per ciascun sottoinsieme I di $\mathbb{C}^4$ dato qua sotto, si mostri che I è un insieme linearmente indipendente e si completi ad una base di $\mathbb{C}^4$.

(A)

$$\{\emptyset\}\,.$$

(B)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

(C)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(D)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(E)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

ESERCIZIO 6

Per ciascun sottoinsieme S di $\mathbb{C}^4$ dato qua sotto, si mostri che S genera $\mathbb{C}^4$ e si estragga una base di $\mathbb{C}^4$.

(A)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(B)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(C)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(D)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

(E)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 7

Per ciascun sottoinsieme linearmente indipendente $I \subset \mathbb{C}^4$ dato nell'esercizio 5 e per ciascun sottoinsieme generante $S \subset \mathbb{C}^4$ dato nell'esercizio 6, si osservi che $I \subseteq S$ e si determini una base B di $\mathbb{C}^4$ tale che $I \subseteq B \subseteq S$.

ESERCIZIO 8

Per ciascuno dei sottospazi U dell'Esercizio 1, trovare un sottospazio complementare, cioè un sottospazio $S \leq \mathbb{Q}^4$ tale che $U \oplus^{\text{int}} S = \mathbb{Q}^4$.

Idem per i sottospazi W dell'Esercizio 2.

ESERCIZIO 9

Per ciascuna delle seguenti coppie di sottospazi $S, T \leq \mathbb{R}^4$, dimostrare che $\mathbb{R}^4 = S \oplus^{\text{int}} T$.

(A)

$$S := \mathrm{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \end{cases} \right) \quad \text{e} \quad T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(B)

$$S := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C)

$$S := \mathrm{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \end{cases} \right) \quad \text{e} \quad T := \mathrm{Sol}\left(\{ -2X_1 + X_2 + 3X_3 + 2X_4 = 0\right)$$

(D)

$$S := \mathrm{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases} \right) \quad \text{e} \quad T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(E)

$$S := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\rangle \quad \text{e} \quad T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(F)

$$S := \mathrm{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases} \right) \quad \text{e} \quad T := \mathrm{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 + X_3 + 2X_4 = 0 \end{cases} \right)$$