FOGLIO DI ESERCIZI 4: APPLICAZIONI LINEARI

ESERCIZIO 1

Sia $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\mathbb{Q}^3$ con base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$. Si considerino i seguenti omomorfismi lineari da $\mathbb{Q}^4$ a $\mathbb{Q}^3$

(A)

$$\begin{cases} \Phi_1(e_1) = f_1 - f_2 + f_3, \\ \Phi_1(e_2) = -f_1 + f_2 - f_3, \\ \Phi_1(e_3) = 0, \\ \Phi_1(e_4) = 2f_1 - 2f_2 + 2f_3. \end{cases}$$

(B)

$$\begin{cases} \Phi_1(e_1) = f_1 - f_2 + f_3, \\ \Phi_1(e_2) = -f_1 + f_2 - f_3, \\ \Phi_1(e_3) = f_1 + f_2, \\ \Phi_1(e_4) = 2f_1 - 2f_2 + 2f_3. \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} \Phi_1(e_1) = f_1 - f_2 + f_3, \\ \Phi_1(e_2) = -f_1 + f_2 - f_3, \\ \Phi_1(e_3) = f_1 + f_2, \\ \Phi_1(e_4) = f_2 - f_3. \end{cases}$$

Per ciascuno degli omomorfismi Φ_i si calcoli:

(i) La matrice associata a Φ_i rispetto alla basi canoniche nel dominio e nel codominio.
(ii) Il nucleo di Φ_i in forma cartesiana e in forma parametrica, e si determini la nullità di Φ_i.
(iii) L'immagine di Φ_i in forma cartesiana e in forma parametrica, e si determini il rango di Φ_i.

ESERCIZIO 2

Sia $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\mathbb{Q}^3$ con base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$. Si considerino i seguenti omomorfismi lineari da $\mathbb{Q}^3$ a $\mathbb{Q}^4$

(A)

$$\begin{cases} \Psi_1(f_1) = e_1 - e_2 + e_4, \\ \Psi_1(f_2) = -e_1 + e_2 - e_4, \\ \Psi_1(f_3) = 2e_1 - 2e_2 + 2e_4. \end{cases}$$

(B)

$$\begin{cases} \Psi_1(f_1) = e_1 - e_2 + e_4, \\ \Psi_1(f_2) = -e_1 + e_2 - e_4, \\ \Psi_1(f_3) = e_1 + e_3 - e_4. \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} \Psi_1(f_1) = e_1 - e_2 + e_4, \\ \Psi_1(f_2) = e_2 - e_3 + e_4, \\ \Psi_1(f_3) = e_1 + e_3 - e_4. \end{cases}$$

Per ciascuno degli omomorfismi Ψ_i si calcoli:

(i) La matrice associata a Ψ_i rispetto alla basi canoniche nel dominio e nel codominio.
(ii) Il nucleo di Ψ_i in forma cartesiana e in forma parametrica, e si determini la nullità di Ψ_i.
(iii) L'immagine di Ψ_i in forma cartesiana e in forma parametrica, e si determini il rango di Ψ_i.

ESERCIZIO 3

Preso $\Phi_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^3)$ come nell'Esercizio 1 e un omomorfismo $\Psi_j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4)$ come nell'Esercizio 2, si calcoli:

(i) La matrice associata alle composizioni $\Psi_j \circ \Phi_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ e $\Phi_i \circ \Psi_j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.
(ii) I nuclei di $\Psi_j \circ \Phi_i$ e $\Phi_i \circ \Psi_j$ in forma cartesiana e parametrica, e le nullità di queste applicazioni lineari.
(iii) Le immagini di $\Psi_j \circ \Phi_i$ e $\Phi_i \circ \Psi_j$ in forma cartesiana e parametrica, e i rangi di queste applicazioni lineari.

ESERCIZIO 4

Sia $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si considerino i seguenti endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^3$:

(A)

$$\begin{cases} \Theta_1(e_1) = e_1 + e_2 - e_3, \\ \Theta_1(e_2) = 2e_2 - e_3, \\ \Theta_1(e_3) = e_1 - e_3. \end{cases}$$

(B)

$$\begin{cases} \Theta_1(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \\ \Theta_1(e_2) = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ \Theta_1(e_3) = e_1 - e_3. \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} \Theta_1(e_1) = e_2 - e_3, \\ \Theta_1(e_2) = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ \Theta_1(e_3) = e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Per ciascun degli endomorfismi Θ_i di sopra:

(i) Si determini la matrice associata a Θ_i rispetto alla basi canoniche del dominio e del codominio.
(ii) Dimostrare che Θ_i è un isomorfismo.
(iii) Calcolare l'applicazione lineare inversa Θ_i^{-1}.

ESERCIZIO 5

Si considerino le seguenti matrici di $M_{3,3}(\mathbb{C})$:

(A)

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(B)

$$A_2 := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(C)

$$A_3 := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ciascuna delle matrici A_i di sopra:

(i) Si scriva A_i come prodotto di matrici elementari per righe;
(ii) Si scriva A_i come prodotto di matrici elementari per colonne;
(iii) Si determini A_i^{-1}.

ESERCIZIO 6

Si considerino i seguenti endomorfismi lineari di $\mathbb{C}^3$:

(A)

$$\Pi_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+2y-2z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(B)

$$\Pi_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+2y-2z \\ x-y \end{pmatrix}.$$

(C)

$$\Pi_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y+z \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Per ciascun degli endomorfismi Π_i di sopra:

(i) Si determini la matrice associata a Π_i rispetto alla basi canoniche del dominio e del codominio.
(ii) Si determini il rango e la nullità di Π_i.
(iii) Se Π_i è invertibile, si calcoli Π_i^{-1}.

ESERCIZIO 7

Si considerino le seguenti matrici a coefficienti in $\mathbb{Q}$:

(A)

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(B)

$$B_2 := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(C)

$$B_3 := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(D)

$$B_4 := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per ciascuna delle matrici B_i di sopra:

(i) Si determini il rango di B_i;

(ii) Si trovino della matrice invertibili P e Q tali che $P \cdot B_i \cdot Q$ é in forma canonica rispetto alla relazione di equivalenza.

ESERCIZIO 8

Si considerino i seguenti sottonsiemi (ordinati) di $\mathbb{R}^3$:

(A)

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(B)

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(C)

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(D)

$$\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica (ordinata) di $\mathbb{R}^3$.

(i) Dimostrare che ciascun $\mathcal{B}_i$ è un base di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Per ciascun $\mathcal{B}_i$, scrivere la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}_i}$.

(iii) Per ciascun $\mathcal{B}_i$, scrivere la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{B}_i,\mathcal{E}}$.

(iv) Per ciascuna coppia $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{B}_j$, scrivere la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j}$.

ESERCIZIO 9

Si considerino le seguenti matrici di $M_{3,3}(\mathbb{Q})$:

(A)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(B)

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(C)

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(D)

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica (ordinata) di $\mathbb{Q}^3$.

(i) Dimostrare che ciascuna matrice M_i è invertibile e calcolare l'inversa M_i^{-1}.
(ii) Per ogni $1 \leq i \leq 4$, determinare la base ordinata $\mathcal{C}_i$ di $\mathbb{Q}^3$ tale che $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}_i} = M_i$.
(iii) Per ogni $1 \leq i \leq 4$, determinare la base ordinata $\mathcal{D}_i$ di $\mathbb{Q}^3$ tale che $M_{\mathcal{D}_i,\mathcal{E}} = M_i$.
(iv) Per ogni $1 \leq i \neq j \leq 4$, scrivere le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{C}_i,\mathcal{D}_j}$ e $M_{\mathcal{D}_j,\mathcal{C}_i}$.

ESERCIZIO 10

Si consideri la seguente applicazione lineare

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - z \\ -x + y - z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica (ordinata) di $\mathbb{R}^3$ e siano $\mathcal{B}_i$ le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ dell'Esercizio 8.

Determinare le seguenti matrici:

(i) $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\Phi)$.
(ii) $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}_i}(\Phi)$ per ogni $1 \leq i \leq 4$.
(iii) $M_{\mathcal{B}_i,\mathcal{E}}(\Phi)$ per ogni $1 \leq i \leq 4$.
(iv) $M_{\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j}(\Phi)$ per ogni $1 \leq i, j \leq 4$.

ESERCIZIO 11

Trovare basi del dominio e del codominio rispetto alle quali le seguenti applicazioni lineari si scrivono in forma canonica

(A)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \mathbb{Q}^3 &\longrightarrow \mathbb{Q}[x]_{\leq 3} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\mapsto (a + b - c) + (a - b - c)x + (2a - 2c)x^2 - 2bx^3 \end{aligned}$$

(B)

$$\begin{aligned} \Gamma_2 : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a + bx + cx^2 + dx^3 &\mapsto \begin{pmatrix} a + b - c - d \\ -2a + b - c + 2d \\ -a + 2b - 2c + d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(C)

$$\begin{aligned} \Gamma_3 : \mathbb{C}[x]_{\leq 3} &\longrightarrow \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \\ a + bx + cx^2 + dx^3 &\mapsto (a + b - c) + (b - c - d)x + (a + d)x^2 + (2a + 2b - 2c)x^3 \end{aligned}$$

(D)

$$\begin{aligned} \Gamma_4 : \mathbb{Q}^4 &\longrightarrow \mathbb{Q}^4 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a-b-c+d \\ -a-b+c+d \\ -2b+2d \\ 2a-2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 12 (NUOVO)

Trovare basi del dominio e del codominio rispetto alle quali le applicazioni lineari degli Esercizi 1, 2, 4, 6 si scrivono in forma canonica.