FOGLIO DI ESERCIZI 5: APPLICAZIONI LINEARI (BIS)

ESERCIZIO 1
Sia $\Phi : V \to W$ un isomorfismo e sia $S \subseteq V$. Dimostrare che

(i) S è lineramente indipendente se e solo se $\Phi(S)$ è linearmente indipendente.
(ii) S è generante se e solo se $\Phi(S)$ è generante.
(iii) S è una base se e solo se $\Phi(S)$ è un base.

ESERCIZIO 2
Sia $\Phi : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $\mathcal{B}$ una base di V. Dimostrare che

(i) Φ è iniettiva se e solo se $\Phi(\mathcal{B})$ è linearamente indipendente.
(ii) Φ è suriettiva se e solo se $\Phi(\mathcal{B})$ è generante.
(iii) Φ è un isomorfismo se e solo se $\Phi(\mathcal{B})$ è una base di W.

ESERCIZIO 2bis
Sia $\Phi : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $S \subseteq V$. Dimostrare che

(i) Se Φ è iniettiva e S è linearamente indipendente allora $\Phi(S)$ è linearmente indipendente.
(ii) Se Φ è suriettiva e S è generante allora $\Phi(S)$ è generante.

ESERCIZIO 3
Sia $\Phi : V \to W$ un'applicazione lineare e supponiamo che $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Dimostrare che:

(i) Φ è iniettiva se e solo se $\operatorname{rg} \Phi = n$.
(ii) Φ è suriettiva se e solo se $\operatorname{null} \Phi = n - m$.

ESERCIZIO 4
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dimostrare che, dati due dei seguenti oggetti

(i) una matrice $A \in M_n(F)$ invertibile;
(ii) una base ordinata $\mathcal{B}$ di V;
(iii) una base ordinata $\mathcal{C}$ di V;

il terzo è univocamente determinato dall'equazione

$$A = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

ESERCIZIO 5 (Somma diretta di endomorfismi)

(i) Sia $\Phi_i \in \operatorname{End}(V_i)$ per $i = 1, 2$. Dimostrare che la mappa (chiamata *somma diretta di applicazioni lineari*)

$$\begin{aligned} \Phi_1 \oplus \Phi_2 : V_1 \oplus^{\text{est}} V_2 &\longrightarrow V_1 \oplus^{\text{est}} V_2 \\ (v_1, v_2) &\mapsto (\Phi_1(v_1), \Phi_2(v_2)) \end{aligned}$$

è un endomorfismo lineare di $V_1 \oplus^{\text{est}} V_2$.

(ii) Sia $V = S \oplus^{\text{int}} V$ e sia $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ tale che $\Phi(S) \subseteq S$ e $\Phi(T) \subseteq T$.
   (a) Dimostrare che $\Phi_{|S} \in \operatorname{End}(S)$ e $\Phi_{|T} \in \operatorname{End}(T)$.

(b) Si consideri l'isomorfismo lineare

$$f : S \oplus^{\text{est}} T \xrightarrow{\cong} V,$$
$$(s,t) \mapsto s+t.$$

Dimostrare che $\Phi_{|S} \oplus \Phi_{|T} = f^{-1} \circ \Phi \circ f$.

ESERCIZIO 6 (Proiezioni)

Data una decomposizione $V = S \oplus^{\text{int}} T$, si consideri l'operatore lineare (chiamato *proiezione su S lungo T*)

$$\rho_{S,T} : V = S \oplus^{\text{int}} T \longrightarrow V,$$
$$v = s+t \mapsto s.$$

Dimostrare che:

(i) $\operatorname{Im} \rho_{S,T} = S$ e $\ker \rho_{T,S} = T$.

(ii)
$$\begin{cases} \rho_{S,T} + \rho_{T,S} = \mathrm{id}_V, \\ \rho_{S,T} \circ \rho_{T,S} = 0 = \rho_{T,S} \circ \rho_{S,T}, \\ \rho_{S,T}^2 = \rho_{S,T} \quad \text{e} \quad \rho_{T,S}^2 = \rho_{T,S}. \end{cases}$$

(iii) Un operatore $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ è tale che $\Phi(S) \subseteq S$ e $\Phi(T) \subseteq T$ se e solo se Φ commuta con $\rho_{T,S}$ (oppure con $\rho_{S,T}$).

ESERCIZIO 7 (Operatori idempotenti)

Sia $\rho \in \operatorname{End}(V)$ tale che $\rho^2 = \rho$ (un tale operatore si dice *idempotente*).

(i) Dimostrare che $\tau := \mathrm{id}_V - \rho$ è un operatore idempotente tale che $\rho \circ \tau = 0 = \tau \circ \rho$.

(ii) Dimostrare che $\operatorname{Im}(\rho) = \ker(\tau)$ e $\ker(\rho) = \operatorname{Im}(\tau)$.

(iii) Dimostrare che $V = S \oplus^{\text{int}} T$ dove $S = \operatorname{Im}(\rho) = \ker(\tau)$ e $T = \ker(\rho) = \operatorname{Im}(\tau)$.

(iv) Dimostrare che $\rho = \rho_{S,T}$ e che $\tau = \rho_{T,S}$.

ESERCIZIO 8 (Risoluzioni dell'identità)

Due operatori idempotenti ρ e τ si dicono *ortogonali*, denotato con $\rho \perp \tau$, se $\rho \circ \tau = 0 = \tau \circ \rho$. Una *risoluzione dell'identità* per V è una scrittura delle forma

$$\mathrm{id}_V = \rho_1 + \ldots + \rho_n,$$

con $\{\rho_i\}$ sono operatori idempotenti a due a due ortogonali.

(i) Sia $\mathrm{id}_V = \rho_1 + \ldots + \rho_n$ una risoluzione dell'idendità per V. Dimostrare che si ha una decomposizione

$$V = \operatorname{Im}(\rho_1) \oplus^{\text{int}} \ldots \oplus^{\text{int}} \operatorname{Im}(\rho_n),$$

e che ρ_i è la proiezione su $\operatorname{Im}(\rho_i)$ lungo il sottospazio $\oplus^{\text{int}}_{j \neq i} \operatorname{Im}(\rho_j)$.

(ii) Data una decomposizione $V = V_1 \oplus^{\text{int}} \ldots \oplus^{\text{int}} V_n$, sia ρ_i la proiezione su V_i lungo il sottospazio $\oplus^{\text{int}}_{j \neq i} V_j$. Dimostrare che

$$\mathrm{id}_V = \rho_1 + \ldots + \rho_n$$

è una risoluzione dell'indentità.

ESERCIZIO 9

Siano V e W due F-spazi vettoriali di dimensioni tale che V ha dimensione finita. Siano $K \leq V$ e $I \leq W$ due sottospazi tali che $\dim K + \dim I = \dim V$. Si mostri che esiste un'applicazione lineare $\Phi \in \operatorname{Hom}(V,W)$ tale che $\ker(\Phi) = K$ e $\operatorname{Im}(\Phi) = I$.

ESERCIZIO 10

Siano V e W due F-spazi vettoriali.

(i) Dimostrare che esiste un'applicazione lineare iniettiva $\Phi : V \hookrightarrow W$ se e solo se $\dim V \leq \dim W$.

(ii) Dimostrare che esiste un'applicazione lineare suriettiva $\Phi : V \twoheadrightarrow W$ se e solo se $\dim V \geq \dim W$.

ESERCIZIO 11

Siano $A \in M_{m,n}(F)$ e si consideri lo spazio delle soluzioni $\mathrm{Sol}_A \leq F^n$ del sistema lineare omogeneo Sis_A con matrice A. Dimostrare che

$$\dim \mathrm{Sol}_A \geq n - m.$$

ESERCIZIO 12

Sia $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e sia $C \subset V$. Dimostrare che:

(i) Se Φ è iniettiva e C è linearmente indipendente, allora $\Phi(C)$ è linearmente indipendente.

(ii) Se Φ è suriettiva e C è generante, allora $\Phi(C)$ è generante.

ESERCIZIO 13

Sia $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e sia $C \subset V$. Dimostrare che:

(i) Se $\Phi(C)$ è linearmente indipendente allora C è linearmente indipendente.

(ii) Se $\Phi(C)$ è linearmente indipendente e C genera V, allora Φ ìniettiva.

ESERCIZIO 14

Sia $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dimostrare che:

(i) Φ è iniettiva se e solo se esiste $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ tale che $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_V$.

(ii) Φ è suriettiva se e solo se esiste $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ tale che $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_W$.

ESERCIZIO 15

Sia V un F-spazio vettoriale di dimensione finita. Siano $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$. Dimostrare che:

(i) $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_V$ se e solo se $\Psi \circ \Psi = \mathrm{id}_V$.

(ii) Se $\Phi \circ \Psi$ è invertibile, allora anche Φ e Ψ sono invertibili.

ESERCIZIO 16

Sia $A \in M_{m,n}(F)$ una matrice di rango k. Dimostrare che esistono due matrici $X \in M_{m,k}(F)$ e $Y \in M_{k,n}(F)$, entrambi di rango k, take che $A = X \cdot Y$.

ESERCIZIO 17

Sia V un F-spazio vettoriale di dimensione finita. Siano $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$. Dimostrare che:

(i) Esiste $\Theta \in \mathrm{End}(V)$ tale che $\Phi = \Psi \circ \Theta$ se e solo se $\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq \mathrm{Im}(\Psi)$.

(ii) Esiste $\Theta \in \mathrm{End}(V)$ tale che $\Phi = \Theta \circ \Psi$ se e solo se $\ker(\Psi) \subseteq \ker(\Phi)$.

ESERCIZIO 18

Siano V e W due F-spazi vettoriali di dimensione n e m rispettivamente. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordinata di V e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base ordinata di W. Si considerino le applicazioni lineari $\{\Phi_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ definite da

$$\Phi_{ij}(v_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j, \\ w_i & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Dimostrare che $\{\Phi_{ij}\}$ formano una base di $\mathrm{Hom}(V, W)$.

ESERCIZIO 19

Sia V un F-spazio vettoriale di dimensione finita. Dimostrare che:

(i) Se $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$ sono tali che $\Phi \circ \Psi = 0$ allora $\mathrm{rg}(\Phi) + \mathrm{rg}(\Psi) \leq n$.
(ii) Per ogni $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ esiste $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ tale che $\Phi \circ \Psi = 0$ e $\mathrm{rg}(\Phi) + \mathrm{rg}(\Psi) \leq n$.
(iii) Per ogni $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ esiste $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ tale che $\Phi \circ \Psi = 0$ e $\mathrm{rg}(\Phi) + \mathrm{rg}(\Psi) \leq n$.
(iv) Dare un esempio di due operatori $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$ tali che $\Phi \circ \Psi = 0$ ma $\Psi \circ \Phi \neq 0$.

ESERCIZIO 20

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dimostrare che, dati due dei seguenti oggetti

(i) una matrice $A \in M_n(F)$ invertibile;
(ii) una base ordinata $\mathcal{B}$ di V;
(iii) un automorfismo $\Theta : V \to V$;

il terzo è univocamente determinato dall'equazione

$$A = M_{\mathcal{B}}(\Theta).$$

ESERCIZIO 21

Siano V e W due F-spazi vettoriali e sia $S \leq V$ un sottospazio. Dimostrare che ogni applicazione lineare $\Phi : S \to W$ si estende ad un'applicazione lineare $\overline{\Phi} : V \to W$.

ESERCIZIO 22

Sia $\Phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che esiste un sottospazio $S \leq V$ tale che:

(i) $S \cap \ker(\Phi) = \{0\}$;
(ii) $\Phi(S) = \mathrm{Im}(\Phi)$.

ESERCIZIO 23

Siano V e W due F-spazi vettoriali di dimensione finita e siano $S \leq V$ e $T \leq W$ due sottospazi vettoriali. Dimostrare che:

(i) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$ tale che $\ker(\Phi) = S$ se e solo se $\dim S \geq \dim V - \dim W$.
(ii) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$ tale che $\mathrm{Im}(\Phi) = T$ se e solo se $\dim T \leq \dim V$.

ESERCIZIO 24

Siano S, T due sottospazi di un F-spazio vettoriale V e sia W un F-spazio vettoriale. Siano $g : S \to W$ e $h : T \to W$ due applicazioni lineari tali che $g(x) = h(x)$ per ogni $x \in S \cap T$. Dimostrare che esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : S + T \to W$ tale che la restrizione $f_{|S}$ di f a S coincide con g e la restrizione $f_{|T}$ di f a T coincide con h.