FOGLIO DI ESERCIZI 6: QUOZIENTI, DUALI E TEOREMI DI ISOMORFISMO

ESERCIZIO 1

Data un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$, il *conucleo* di Φ è

$$\operatorname{coker}(\Phi) := W/\operatorname{Im}(\Phi).$$

Dimostrare che se V e W hanno dimensione finita, allora

$$\dim V + \dim \operatorname{coker}(\Phi) = \dim \ker(\Phi) + \dim W.$$

In particolare, se $\dim V = \dim W < \infty$, allora

$$\dim \operatorname{coker}(\Phi) = \dim \ker(\Phi). \tag{0.1}$$

ESERCIZIO 2

Sia F un campo e sia $F^{\mathbb{N}}$ lo spazio vettoriale su F di tutte le successioni $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in F\}$ a valori in F. Si considerino gli operatori di traslazione a sinistra $\mathbb{S}$ e a destra $\mathbb{D}$ cosi definiti:

$$\mathbb{S}((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (a_1, a_2, \ldots) \quad \text{e} \quad \mathbb{D}((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Per ogni $k \geq 1$ si considerino gli iterati $\mathbb{S}^k$ e $\mathbb{D}^k$ ottenuti componendo, rispettivamente, $\mathbb{S}$ e $\mathbb{D}$ con se stessi k volte.

(A) Si dimostri che $\dim \operatorname{coker}(\mathbb{S}^k) = 0$ e $\dim \ker(\mathbb{S}^k) = k$. Dunque formula (0.1) non vale in questo caso.

(B) Si dimostri che $\dim \operatorname{coker}(\mathbb{D}^k) = k$ e $\dim \ker(\mathbb{D}^k) = 0$. Dunque formula (0.1) non vale in questo caso.

ESERCIZIO 3

Sia F un campo tale che $1 \neq -1$ e sia $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Una matrice $A \in M_n(F)$ si dice *simmetrica* (risp. *antisimmetrica*) se $A^t = A$ (risp. $A^t = -A$).

(A) Mostrare che l'insieme delle matrici simmetriche di formato $n \times n$, denotato con $M_n^s(F)$, forma un sottospazio vettoriale di $M_n(F)$. Calcolarne la dimensione e trovare una base.

(B) Mostrare che l'insieme delle matrici antisimmetriche di formato $n \times n$, denotato con $M_n^a(F)$, forma un sottospazio vettoriale di $M_n(F)$. Calcolarne la dimensione e trovare una base.

(C) Mostrare che

$$M_n(F) = M_n^s(F) \oplus^{\text{int}} M_n^a(F).$$

ESERCIZIO 4

Sia S un sottospazio di un F-spazio vettoriale V. Dimostrare che un sottoinsieme $X \subset V$ è un classe laterale rispetto a S se e solo se per ogni $x_0 \in X$ vale che (resp. esiste un $x_0 \in X$ tale che):

$$S = \{x - x_0 : x \in X\}.$$

ESERCIZIO 5

Sia $\Phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che per ogni $w \in \operatorname{Im}\Phi$, la sua immagine inversa $\Phi^{-1}(w)$ è una classe laterale rispetto a $\ker(\Phi)$.

ESERCIZIO 6

Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq n-1}$ per un certo $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri il funzionale lineare

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a : \mathbb{R}[X]_{\leq n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ p(X) &\mapsto p(a). \end{aligned}$$

Si denoti con $\mathbb{D}$ l'operatore di $\mathbb{R}[X]$ di derivazione $\mathbb{D}(p(X)) := p'(X)$.

(A) Si fissi un numero $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\mathcal{B} := \left\{ p_k(X) := \frac{(X-a)^k}{k!} \right\}_{0 \leq k \leq n-1}$$

è un base di V con base duale

$$\hat{\mathcal{B}} := \{\mathbb{E}_a \circ \mathbb{D}^k\}_{0 \leq k \leq n-1}$$

(B) Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri reali a due a due distinti. Dimostrare che

$$\mathcal{C} := \left\{ q_k(X) := \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right\}_{1 \leq k \leq n}$$

è un base di V con base duale

$$\hat{\mathcal{C}} = \{\mathbb{E}_{a_1}, \ldots, \mathbb{E}_{a_n}\}$$

(C) Dimostrare le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(X) &= p(1/2) \quad \text{per ogni } p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 0}, \\ \int_0^1 p(X) &= \frac{1}{2}p(0) + \frac{1}{2}p(1) \quad \text{per ogni } p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}, \\ \int_0^1 p(X) &= \frac{1}{6}p(0) + \frac{4}{6}p(1/2) + \frac{1}{6}p(1) \quad \text{per ogni } p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 2}, \\ \int_0^1 p(X) &= \frac{1}{8}p(0) + \frac{3}{8}p(1/3) + \frac{3}{8}p(2/3) + \frac{1}{8}p(1) \quad \text{per ogni } p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 7

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di F^n. Consideriamo l'isomorfismo canonico

$$\begin{aligned} \Delta : F^n &\xrightarrow{\cong} \widehat{F^n}, \\ a &\mapsto \Delta_a : F^n \to F, \\ &\qquad v \mapsto a^t \cdot x. \end{aligned}$$

Dimostrare che $\Delta(\mathcal{B}) = \widehat{\mathcal{B}}$.

ESERCIZIO 8

Sia $\{V_i\}_{i \in I}$ una collezione di F-spazi vettoriali. Dimostrare che esiste un isomorfismo canonico

$$\widehat{\left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right)} \cong \prod_{i \in I} \widehat{V_i}.$$

ESERCIZIO 9

Siano V e W due F-spazi vettoriali di dimensione finita e sia $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dimostrare che valgono le seguenti formule:

$$\begin{cases} \dim V - \dim \ker(\Phi) = \dim W - \dim \ker(\widehat{\Phi}), \\ \dim W - \dim \operatorname{coker}(\Phi) = \dim V - \dim \operatorname{coker}(\widehat{\Phi}). \end{cases}$$

ESERCIZIO 10

Sia V uno spazio vettoriale (possibilmente di dimensione infinita). Siano W_1 e W_2 due sottospazi di V. Dimostrare che:

(i) $\mathrm{Ann}(W_1 \cap W_2) = \mathrm{Ann}(W_1) + \mathrm{Ann}(W_2)$.

(ii) $\mathrm{Ann}(W_1 + W_2) = \mathrm{Ann}(W_1) \cap \mathrm{Ann}(W_2)$.

(iii) Se $V = W_1 \oplus^{\mathrm{int}} W_2$ allora $\widehat{V} = \mathrm{Ann}(W_1) \oplus^{\mathrm{int}} \mathrm{Ann}(W_2)$.

ESERCIZIO 11

Sia V un F-spazio vettoriale e sia $\mathcal{B}$ un base di V. Dimostrare che la mappa canonica $\tau_V : V \to \widehat{\widehat{V}}$ manda $\mathcal{B}$ in $\widehat{\widehat{\mathcal{B}}}$.

ESERCIZIO 12 (Successioni esatte corte)

Una *successione esatta corta* di F-spazi vettoriali è un diagramma

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$$

tale che U, V, W sono F-spazi vettoriali, f e g sono due applicazioni lineari, e vale che f è iniettiva, $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ e g è suriettiva. Dimostrare che:

(i) L'applicazione lineare f induce un isomorfismo $U \xrightarrow{\cong} \ker g$.

(ii) L'applicazione lineare g induce un isomorfismo $\operatorname{coker} f (= V/\mathrm{Im}(f)) \xrightarrow{\cong} W$.

(iii) Se U, V e W hanno dimensione finita, allora vale che

$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

ESERCIZIO 13 (Successioni esatte)

Un diagramma

$$V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{f_n} V_n, \tag{0.2}$$

di applicazioni lineari tra F-spazi vettoriali si dice una *successione esatta* se

$$\mathrm{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1}) \quad \text{per ogni } 1 \le i \le n-1.$$

(i) Mostrare che una successione esatta come in (0.2) induce successioni esatte corte

$$0 \to \ker(f_i) \to V_{i-1} \to \mathrm{Im}(f_i) \to 0 \quad \text{per ogni } 1 \le i \le n,$$
$$0 \to \mathrm{Im}(f_n) \to V_n \to \operatorname{coker}(f_n) \to 0.$$

(ii) Mostrare che una successione esatta come in (0.2) può essere completata ad una successione esatta

$$0 \to \ker(f_1) := V_{-1} \xrightarrow{f_0} V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{f_n} V_n \xrightarrow{f_{n+1}} V_{n+1} := \operatorname{coker}(f_n) \to 0, \tag{0.3}$$

(iii) Mostrare che data una successione esatta come in (0.3), vale la formula

$$0 = \sum_{i=-1}^{n+1} (-1)^i \dim V_i.$$

ESERCIZIO 14(NUOVO)

Sia V un F-spazio vettoriale e siano $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq \widehat{V}$. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \Phi : V &\longrightarrow F^r \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \dots \\ f_r(v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dimostrare che:

(i) ϕ è suriettiva se e solo se $\{f_1, \dots, f_r\}$ è un insieme linearmente indipendente di $\widehat{V}$.

(ii) ϕ è iniettiva se e solo se $\{f_1, \dots, f_r\}$ è un insieme generante di $\widehat{V}$.

(iii) ϕ è biettiva se e solo se $\{f_1, \dots, f_r\}$ è una base di $\widehat{V}$.