FOGLIO DI ESERCIZI 7: DUALITÀ

ESERCIZIO 1

Si considerino i seguenti sottonsiemi (ordinati) di $\mathbb{R}^3$:

(A)

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(B)

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(C)

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(D)

$$\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Dimostrare che ciascun $\mathcal{B}_i$ è un base di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Per ciascun $\mathcal{B}_i$, determinare la base duale $\widehat{\mathcal{B}_i}$ in $\mathbb{R}^3$ usando l'isomorfismo canonico $\mathbb{R}^3 \cong (\mathbb{R}^3)^*$.

ESERCIZIO 2

Si considerino i sottospazi U_i di $\mathbb{Q}^4$ che sono le soluzioni dei sistemi lineari omogenei qua sotto indicati:

(A)

$$\{X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0.$$

(B)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0. \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0, \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0. \end{cases}$$

(D)

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0, \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0. \end{cases}$$

Per ciascun $U_i \leq \mathbb{Q}^4$ si calcoli $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Q}^4}(U_i) \leq \mathbb{Q}^4$ in forma cartesiana e in forma parametrica.

ESERCIZIO 3

Si considerino i sottospazi W_i di $\mathbb{Q}^4$ dato qua sotto in forma parametrica:

(A)

$$W_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(B)

$$W_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C)

$$W_3 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(D)

$$W_4 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per ciascun $W_i \leq \mathbb{Q}^4$ si calcoli $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Q}^4}(W_i) \leq \mathbb{Q}^4$ in forma cartesiana e in forma parametrica.

ESERCIZIO 4

Sia $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\mathbb{Q}^3$ con base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$. Si identifichino gli spazi duali tramite gli isomorfismi canonici $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$.

Si considerino i seguenti omomorfismi lineari da $\mathbb{Q}^4$ a $\mathbb{Q}^3$

(A)

$$\begin{cases} \Phi_1(e_1) = f_1 - f_2 + f_3, \\ \Phi_1(e_2) = -f_1 + f_2 - f_3, \\ \Phi_1(e_3) = 0, \\ \Phi_1(e_4) = 2f_1 - 2f_2 + 2f_3. \end{cases}$$

(B)

$$\begin{cases} \Phi_2(e_1) = f_1 - f_2 + f_3, \\ \Phi_2(e_2) = -f_1 + f_2 - f_3, \\ \Phi_2(e_3) = f_1 + f_2, \\ \Phi_2(e_4) = 2f_1 - 2f_2 + 2f_3. \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} \Phi_3(e_1) = f_1 - f_2 + f_3, \\ \Phi_3(e_2) = -f_1 + f_2 - f_3, \\ \Phi_3(e_3) = f_1 + f_2, \\ \Phi_3(e_4) = f_2 - f_3. \end{cases}$$

Per ciascuno degli omomorfismi Φ_i si calcoli:

(i) $\mathrm{Ann}(\ker(\Phi))$ in forma cartesiana e in forma parametrica.
(ii) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}(\Phi_i))$ in forma cartesiana e in forma parametrica.
(iii) Il nucleo di $\widehat{\Phi}_i$ in forma cartesiana e in forma parametrica.
(iv) L'immagine di $\widehat{\Phi}_i$ in forma cartesiana e in forma parametrica.

ESERCIZIO 5

Sia $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e si consideri l'isomorfismo canonico $(\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}$. Si considerino i seguenti endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^3$:

(A)

$$\begin{cases} \Theta_1(e_1) = e_1 + e_2 - e_3, \\ \Theta_1(e_2) = 2e_2 - e_3, \\ \Theta_1(e_3) = e_1 - e_3. \end{cases}$$

(B)

$$\begin{cases} \Theta_2(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \\ \Theta_2(e_2) = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ \Theta_2(e_3) = e_1 - e_3. \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} \Theta_3(e_1) = e_2 - e_3, \\ \Theta_3(e_2) = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ \Theta_3(e_3) = e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Per ciascun degli endomorfismi Θ_i di sopra:

(i) Dimostrare che Θ_i è un isomorfismo.
(ii) Calcolare l'endomorfismo $(\widehat{\Theta_i})^{-1}$ di $(\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3$.