FOGLIO DI ESERCIZI 8: DETERMINANTE

ESERCIZIO 1

Sia $A \in M_n(F)$ una matrice triangolare superiore o inferiore. Dimostrare che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

ESERCIZIO 2

Sia $A \in M_n(F)$ e sia $\lambda \in F$. Dimostrare che

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A).$$

ESERCIZIO 3

Si consideri una matrice $M \in M_n(F)$ triangolare a blocchi, cioè della forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

con $A \in M_k(F)$, $B \in M_{k,n-k}(F)$ e $C \in M_{n-k}(F)$ per qualche $0 \leq k \leq n$. Dimostrare che

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C).$$

ESERCIZIO 4

Per ogni $x_1, \ldots, x_n \in F$, dimostrare la seguente identità (chiamata *identità di Vandermonde*):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

[Suggerimento: usare l'induzione su n facendo operazioni elementari sulle righe.]

ESERCIZIO 5

Per ogni $\sigma \in S_n$, si consideri la matrice $P(\sigma) \in M_n(\mathbb{Q})$ (chiamata *matrice di permutazione* associata a σ) definita da

$$P(\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \sigma(i), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che

$$\det P(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

ESERCIZIO 6 (TRACCIA)

Si consideri la seguente funzione (chiamata *traccia*)

$$\operatorname{tr} : M_n(F) \longrightarrow F,$$

$$A \mapsto \operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

Dimostrare che:

(i) tr è un omomorfismo lineare.
(ii) Vale che $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$ per ogni $A, B \in M_n(F)$.

(iii) tr è invariante per similitudine.
(iv) $-\operatorname{tr}(A)$ è il coefficiente di x^{n-1} nel polinomio caratteristico $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.

ESERCIZIO 7 (Duale di $M_{m,n}(F)$)

(i) Data una matrice $A \in M_{m,n}(F)$, dimostrare che l'applicazione
$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_A : M_{n,m}(F) &\longrightarrow F \\ B &\mapsto \operatorname{tr}_A(B) = \operatorname{tr}(A \cdot B) \end{aligned}$$
è lineare.

(ii) Dimostrare che l'applicazione
$$\begin{aligned} \Phi : M_{m,n}(F) &\longrightarrow \widehat{M_{n,m}(F)} \\ A &\mapsto \operatorname{tr}_A \end{aligned}$$
è un isomorfismo.

[Suggerimento: siccome il dominio e il codominio hanno la stessa dimensione, basta mostrare che Φ è iniettiva.]