FOGLIO DI ESERCIZI 9: POLINOMIO MINIMO E CARATTERISTICO

ESERCIZIO 1

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ con V spazio vettoriale su F di dimensione finita. Dimostrare che, per ogni $p(x), q(x) \in F[x]$ e $\lambda \in F$, vale che:

(i) $(\lambda \cdot p)(\Phi) = \lambda \cdot p(\Phi)$.
(ii) $(p + q)(\Phi) = p(\Phi) + q(\Phi)$.
(iii) $p(\Phi)$ e $q(\Phi)$ commutano in $\mathrm{End}(V)$, cioè: $p(\Phi)q(\Phi) = q(\Phi)p(\Phi)$.
(iv) $(p \cdot q)(\Phi) = p(\Phi)q(\Phi)$.

ESERCIZIO 2 (parzialmente svolto a lezione...repetita juvant!)

Sia $J_m(\lambda)$ il *blocco di Jordan* di autovalore $\lambda \in F$ e ordine $m \geq 1$, cioè la matrice $J_m(\lambda) \in M_m(F)$ le cui entrate sono

$$(J_m(\lambda))_{i,j} = \begin{cases} \lambda & \text{se } i = j, \\ 1 & \text{se } i = j + 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Dimostrare che il polinomio caratteristico di $J_m(\lambda)$ è $\chi_{J_m(\lambda)}(x) = (x - \lambda)^m$.
(ii) Dimostrare che per ogni $1 \leq f \leq m - 1$ vale che

$$\left((J_m(\lambda) - \lambda \cdot I_m)^f\right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j + f, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In particolare $(J_m(\lambda) - \lambda \cdot I_m)^f \neq 0$ per ogni $1 \leq f \leq m - 1$.

(iii) Dimostrare che il polinomio minimo di $J_m(\lambda)$ è $\mu_{J_m(\lambda)}(x) = (x - \lambda)^m$.
[Suggerimento: Usare che $\mu|\chi$ e il punto precedente.]

ESERCIZIO 3

Sia $A \in M_n(F)$ una matrice triangolare superiore (o inferiore) con tutti $\lambda \in F$ sulla diagonale.

(i) Dimostrare che $\chi_A(x) = (x - \lambda)^n$.
(ii) Dimostrare direttamente (senza usare che μ_A divide χ_A) che $\mu_A(x) = (x - \lambda)^m$ per qualche $1 \leq m \leq n$.
(iii) Per ogni $1 \leq m \leq n$, dare un esempio di una matrice A come sopra tale che $\mu_A(x) = (x - \lambda)^m$.

ESERCIZIO 4

Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo delle seguenti matrici di $M_4(\mathbb{C})$.

(A)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{A_1}(x) = x^4$ e $\mu_{A_1}(x) = x^4$.]

(B)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{A_2}(x) = x^4$ e $\mu_{A_2}(x) = x^3$.]

(C)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{A_3}(x) = x^4$ e $\mu_{A_3}(x) = x^2$.]

(D)

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{A_4}(x) = x^4$ e $\mu_{A_4}(x) = x^2$.]

ESERCIZIO 5

Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo delle seguenti matrici di $M_4(\mathbb{Q})$.

(A)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{B_1}(x) = x^3(x-1)$ e $\mu_{B_1}(x) = x^3(x-1)$.]

(B)

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{B_2}(x) = x^3(x-1)$ e $\mu_{B_2}(x) = x^2(x-1)$.]

(C)

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{B_3}(x) = x^3(x-1)$ e $\mu_{B_3}(x) = x(x-1)$.]

(D)

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{B_4}(x) = x^2(x-1)(x+1)$ e $\mu_{B_4}(x) = x^2(x-1)(x+1)$.]

(E)

$$B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{B_5}(x) = x^2(x-1)(x+1)$ e $\mu_{B_5}(x) = x(x-1)(x+1)$.]

(F)

$$B_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{B_6}(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)$ e $\mu_{B_6}(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)$.]

ESERCIZIO 6

Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo delle seguenti matrici di $M_4(\mathbb{R})$.

(A)

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 11 \\ -1 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{C_1}(x) = (x^2+1)^2$ e $\mu_{C_1}(x) = (x^2+1)^2$.]

(B)

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{C_2}(x) = (x^2+1)^2$ e $\mu_{C_1}(x) = (x^2+1)$.]

(C)

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{C_3}(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)$ e $\mu_{C_3}(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)$.]

(D)

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{C_4}(x) = (x^2+1)x^2$ e $\mu_{C_4}(x) = (x^2+1)x^2$.]

(E)

$$C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{C_5}(x) = (x^2+1)x^2$ e $\mu_{C_5}(x) = (x^2+1)x$.]

(F)

$$C_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $\chi_{C_6}(x) = (x^2+1)x(x-1)$ e $\mu_{C_6}(x) = (x^2+1)x(x-1)$.]

ESERCIZIO 7

Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo delle matrici C_i dell'Esercizio precedente, ma viste come matrici di $M_4(\mathbb{C})$.

ESERCIZIO 8

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ con V un F-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\Phi^* \in \mathrm{End}(V^*)$ il suo operatore duale. Mostrare che

$$\chi_\Phi(x) = \chi_{\Phi^*}(x) \quad \text{e} \quad \mu_\Phi(x) = \mu_{\Phi^*}(x).$$