Nome candidato:

APPELLO A DEL CORSO GE210
30 GENNAIO 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (7 punti)
Si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche su $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$:

$$B_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=4x_1y_1+3x_1y_2+3x_2y_1+2x_3y_3,$$

$$B_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+3x_1y_2+3x_2y_1+2x_1y_3+2x_3y_1+4x_3y_3.$$

(A) Calcolare il rango e il discriminante di B_1 e B_2. Dire se B_1 e B_2 sono equivalenti.
(B) Ridurre B_1 e B_2 a forma canonica.

ESERCIZIO 2 (7 punti)
Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathcal{E}$ e il prodotto scalare standard $\langle -,-\rangle$. Si consideri la matrice

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(A) Si consideri la forma bilineare simmetrica $B\in\mathrm{Bil}^s(\mathbb{R}^3)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(B)=A$. Si trovi una base rispetto alla quale B è in forma canonica.
(B) Si consideri l'operatore $S\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^3,\langle -,-\rangle)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(S)=A$. Si dica se S è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base ortonormale diagonalizzante e si scriva la matrice di S rispetto a tale base.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Su $\mathbb{C}^2$, si consideri la forma sesquilineare Hermitiana

$$B\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=5x_1\overline{x}_2-3ix_1\overline{y}_2+3iy_1\overline{x}_2+2y_1\overline{y}_2,$$

e l'operatore lineare

$$T:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x\\\left(\frac{3}{2}+3i\right)x+iy\end{pmatrix}$$

(A) Trovare una base di $\mathbb{C}^2$ rispetto alla quale B è in forma canonica. Dedurre che B definisce un prodotto scalare su $\mathbb{C}^2$.
(B) Si dica se T è ortonormalmente diagonalizzabile rispetto allo spazio vettoriale unitario $(\mathbb{C}^2,B)$ e, in caso affermativo, trovare una base ortonormalmente diagonalizzabile.
(C) Si dica se $T\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^2,B)$ è normale, Hermitiano, anti-Hermitiano, unitario, positivo o semipositivo.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ si considerino i due sottospazi affini

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{e} \qquad T : \begin{cases} X_3 - X_4 = 0 \\ X_2 + X_4 = 1. \end{cases}$$

Siano $\overline{S}$ e $\overline{T}$ le chiusure proiettive in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ di, rispettivamente, S e T.

(A) Si scrivano S in forma cartesiana e T in forma parametrica, e si calcoli la loro dimensione.
(B) Si dica se S e T sono paralleli e si stabilisca se S e T sono incidenti o sghembi.
(C) Si determini l'intersezione $\overline{S} \cap \overline{T}$ e si calcoli $\dim(\overline{S} + \overline{T})$.
(D) Si considerino i punti all'infinito di S e T, cioè i sottospazi proiettivi $S_\infty := \overline{S} \cap H_0$ e $T_\infty := \overline{T} \cap H_0$ (dove H_0 è l'iperpiano all'infinito). Si determini $S_\infty \cap T_\infty$ e si calcoli $\dim(S_\infty + T_\infty)$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)
Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario e sia $P : V \to V$ un operatore tale che $P^2 = P$ (un tale operatore si chiama idempotente).

(A) Dimostrare che $1 - P$ è idempotente, dove $1 := \mathrm{id}_V$.
(B) Dimostrare che $\ker P = \mathrm{Im}(1 - P)$ e $\mathrm{Im}\, P = \ker(1 - P)$.
(C) Dimostrare che $V = \ker P \oplus \mathrm{Im}\, P$.
(D) Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
  (a) P è la proiezione ortogonale su $\mathrm{Im}\, P$.
  (b) $\ker P$ è ortogonale a $\mathrm{Im}\, P$.
  (c) P è semipositivo.
  (d) P è autoaggiunto.
  (e) P è normale.