Nome candidato:

APPELLO B DEL CORSO GE210
17 FEBBRAIO 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri $\mathbb{C}^2$ con la base canonica $\mathcal{E}$ e il prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$. Si consideri la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix}.$$

(A) Si consideri la forma sesquilineare $B \in \mathrm{Sesq}(\mathbb{C}^2)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = A$. Si trovi una decomposizione $B = B^h + B^a$, con B^h forma sesquilineare Hermitiana e B^a forma sesquilineare anti-Hermitiana.
(B) Si trovi una base di $\mathbb{C}^2$ rispetto alla quale la forma sesquilineare Hermitiana B^h è in forma canonica.
(C) Si trovi una base di $\mathbb{C}^2$ rispetto alla quale la forma sesquilineare anti-Hermitiana B^a è in forma canonica.
(D) Si consideri l'operatore $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(\Phi) = A$. Si dica se Φ è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base ortonormale diagonalizzante e si scriva la matrice di Φ rispetto a tale base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Su $\mathbb{R}^3$, si consideri la forma bilineare simmetrica

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = 6x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 - 3x_1z_2 - 3z_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2,$$

e l'operatore lineare

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2x - 2y \\ 3x - 2z \end{pmatrix}$$

(A) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale B è in forma canonica.
(B) Dimostrare che B definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
(C) Si dica se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base diagonalizzante per T.
(D) Si dica se T è ortonormalmente diagonalizzabile rispetto allo spazio vettoriale ortogonale $(\mathbb{R}^3, B)$ e, in caso affermativo, trovare una base ortonormale diagonalizzante per T.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Si consideri la seguente forma bilineare B su $\mathbb{R}^2$

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_1.$$

(A) Si trovi una base di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale B è in forma canonica.
(B) Si determinino tutti gli elementi di $O^+(\mathbb{R}^2, B)$ e $O^-(\mathbb{R}^2, B)$.

(C) Si dimostri che ogni elemento di $O^-(\mathbb{R}^2, B)$ è una simmetria.

(D) Si consideri l'operatore

$$\eta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

Si mostri che $\eta \in O(\mathbb{R}^2, B)$ e si scriva η come prodotto di simmetrie.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

(A) Sia S il piano di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ che contiene i tre punti

$$P_1 = (1,0,0,0), P_2 = (0,-1,1,1), P_3 = (1,0,1,1).$$

Si scriva un'equazione parametrica per S.

(B) Sia T il piano di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ di giacitura

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

e passante per il punto $Q = (0,0,1,0)$. Si scriva un'equazione cartesiana per T.

(C) Si dica se S e T sono paralleli, e se sono incidenti o sghembi.

(D) Siano $\overline{S}$ e $\overline{T}$ le chiusure proiettive in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ di, rispettivamente, S e T. Si dimostri che $\overline{S} \cap \overline{T}$ è contenuto nell'iperpiano all'infinito H_0 di $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$.

(E) Si calcoli $\dim(\overline{S} + \overline{T})$ usando la formula di Grassmann proiettiva e si determini un'equazione cartesiana per $\overline{S} + \overline{T}$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V. Per ogni $C \in \mathbb{A}$, si consideri la mappa (detta *simmetria* rispetto a C)

$$\sigma_C : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$
$$P \mapsto \sigma_C(P) \ : \overrightarrow{C\sigma_C(P)} = -\overrightarrow{CP}.$$

Mostrare che:

(A) σ_C è un'affinità di $\mathbb{A}$ con isomorfismo lineare associato $\varphi_{\sigma_C} = -\operatorname{id}_V$.

(B) Ogni affinità f tale che $\phi_f = -\operatorname{id}_V$ è uguale a σ_C per un unico $C \in \mathbb{A}$.

(C) $\sigma_D \circ \sigma_C = t_{2\overrightarrow{CD}}$ per ogni $D \in \mathbb{A}$. In particolare, $\sigma_C \circ \sigma_C = \operatorname{id}_{\mathbb{A}}$.

(D) $t_v \circ \sigma_C = \sigma_{t_v(C)} \circ t_v$ per ogni $v \in V$.

(E) Se $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_F$, allora $\sigma_C(P) = 2C - P$.