Nome candidato:

APPELLO C DEL CORSO GE210
16 GIUGNO 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la base canonica $\mathcal{E}$ e il prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) Si consideri la forma bilineare $B \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^2)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = A$. Si trovi una decomposizione $B = B^s + B^a$, con B^s forma bilineare simmetrica e B^a forma bilineare antisimmetrica.
(B) Si trovi una base di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica B^s è in forma canonica.
(C) Si consideri l'operatore $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(\Phi) = A$. Si dica se Φ è normale e, in caso affermativo, si riduca a forma canonica.
(D) Si trovi una decomposizione polare di Φ.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito della base canonica $\mathcal{E}$ e del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$. Si consideri la matrice reale

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A) Si consideri la forma antisimmetrica $B \in \mathrm{Bil}^a(\mathbb{R}^3)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = A$. Si riduca B a forma canonica.
(B) Si consideri l'operatore $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(\Phi) = A$. Si dica se Φ è normale e, in caso affermativo, si riduca Φ a forma canonica.
(C) Si determinino tutte le decomposizioni polari destre di Φ.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Sullo spazio vettoriale $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2.$$

$$C\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2.$$

(A) Si calcolino il rango e il discriminante di B e C e si dica se B e C sono equivalenti oppure no.
(B) Si riducano B e C a forma canonica.
(C) Si determinino tutti gli elementi di $O(V, B)$ e di $O(V, C)$. Che cardinalità hanno $O(V, B)$ e $O(V, C)$?
(D) È vero o no che ogni elemento di $O^-(V, B)$ o di $O^-(V, C)$ è una simmetria? Si giustifichi la risposta.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Consideriamo lo spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$.

(A) Sia S il piano di $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ che contiene i tre punti
$$P_1 = [1,0,1,0,1], P_2 = [0,1,0,0,0], P_3 = [0,0,0,1,1].$$
Si scriva S in forma cartesiana.

(B) Sia T la retta di $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ che contiene i due punti
$$Q_1 = [1,0,1,0,-1], Q_2 = [1,1,1,0,-1].$$
Si scriva T in forma parametrica.

(C) Si determini $S \cap T$ in forma parametrica e $S + T$ in forma cartesiana.

(D) Sia $\mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ l'inclusione standard e si considerino i sottospazi affini $S_0 := S \cap \mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}}$ e $T_0 := T \cap \mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}}$. Si determini $S_0 \cap T_0$ in forma parametrica e $S_0 + T_0$ in forma cartesiana.

ESERCIZIO 5 (10 punti)

(A) Sia (V, B) uno spazio simplettico non-degenere. Dimostrare che ogni elemento del gruppo simplettico $\mathrm{Sp}(V, B)$ ha determinante uguale a 1.
[Suggerimento: usare le trasvezioni simplettiche.]

(B) Sia (V, B) uno spazio ortogonale non-degenere su un campo K di caratteristica diversa da 2. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
  (i) (V, B) è un *piano ortogonale iperbolico*, cioè esiste una base $\{u, v\}$ tale che $B(u,u) = B(v,v) = 0$ e $B(u,v) = 1$.
  (ii) esiste un vettore isotropico non nullo;
  (iii) il discriminante $\mathrm{disc}(B)$ di B è $[-1] \in K^*/(K^*)^2$.