Nome candidato:

APPELLO X DEL CORSO GE210
17 SETTEMBRE 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (9 punti)
Si consideri $\mathbb{C}^2$ con la base canonica $\mathcal{E}$ e il prodotto scalare standard $\langle -,-\rangle$. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}.$$

(A) Si consideri la forma sesquilineare $B \in \mathrm{Sesq}(\mathbb{C}^2)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = A$. Si trovi una decomposizione $B = B^h + B^a$, con B^h forma sesquilineare Hermitiana e B^a forma sesquilineare anti-Hermitiana.
(B) Si trovi una base di $\mathbb{C}^2$ rispetto alla quale la forma sesquilineare Hermitiana B^h è in forma canonica.
(C) Si trovi una base di $\mathbb{C}^2$ rispetto alla quale la forma sesquilineare anti-Hermitiana B^a è in forma canonica.
(D) Si consideri l'operatore $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, \langle -,-\rangle)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(\Phi) = A$. Si dica se Φ è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base ortonormale diagonalizzante e si scriva la matrice di Φ rispetto a tale base.
(E) Trovare tutte le decomposizioni polari destre di Φ.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Su $\mathbb{R}^3$, si consideri la forma bilineare simmetrica

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = 6x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 - 3x_1z_2 - 3z_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2,$$

e l'operatore lineare

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2x-2y \\ 3x-2z \end{pmatrix}$$

(A) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale B è in forma canonica.
(B) Dimostrare che B definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
(C) Si dica se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base diagonalizzante per T.
(D) Si dica se T è ortonormalmente diagonalizzabile rispetto allo spazio vettoriale ortogonale $(\mathbb{R}^3, B)$ e, in caso affermativo, trovare una base ortonormale diagonalizzante per T.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Si consideri la seguente forma bilineare B su $\mathbb{R}^2$

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_1.$$

(A) Si trovi una base di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale B è in forma canonica.

(B) Si determinino tutti gli elementi di $O^+(\mathbb{R}^2, B)$ e $O^-(\mathbb{R}^2, B)$.
(C) Si dimostri che ogni elemento di $O^-(\mathbb{R}^2, B)$ è una simmetria.
(D) Si consideri l'operatore

$$\eta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

Si mostri che $\eta \in O(\mathbb{R}^2, B)$ e si scriva η come prodotto di simmetrie.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

(A) Sia T il piano di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ di giacitura

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

e passante per il punto $Q = (0, 0, 1, 0)$. Sia $\overline{T}$ la chiusura proiettiva di T in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$. Si scriva un'equazione cartesiana per T e un'equazione cartesiana per $\overline{T}$.
(B) Sia S il piano di $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ che contiene i tre punti

$$P_1 = [1, 1, 0, 0, 0], P_2 = [1, 0, -1, 1, 1], P_3 = [1, 1, 0, 1, 1].$$

Si ponga $S^{\text{aff}} := S \cap \mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}}$. Si scriva un'equazione cartesiana per S e un'equazione cartesiana per S^{aff}.
(C) Si calcoli un'equazione parametrica di $S \cap \overline{T}$. Si dica se S^{aff} e T sono paralleli, e se sono incidenti o sghembi.
(D) Si calcoli $\dim(S + \overline{T})$ usando la formula di Grassmann proiettiva e si determini un'equazione cartesiana per $S + \overline{T}$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)

(A) Sia $\mathbb{A}^n_F$ lo spazio affine numerico di dimensione n sul campo F. Una collezione di $n+1$ punti $\{P_0, \ldots, P_n\}$ di $\mathbb{A}^n_F$ si dice *indipendente* se

$$\dim\langle \overrightarrow{P_i P_j} \rangle_{1 \le i,j \le n} = n.$$

Dimostrare che $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n_F)$ agisce in maniera libera e transitiva sulle collezioni di $n+1$ punti $\{P_0, \ldots, P_n\}$ indipendenti di $\mathbb{A}^n_F$.
(B) Sia $\mathbb{P}^n_F$ lo spazio proiettivo numerico di dimensione n sul campo F. Una collezione di $n+2$ punti $\{P_0 = [v_0], \ldots, P_{n+1} = [v_{n+1}]\}$ di $\mathbb{P}^n_F$ si dice *in posizione generale* se

$$\dim\langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots v_n \rangle = n + 1 \text{ per ogni } 0 \le i \le n + 1.$$

Dimostrare che $\mathrm{PGL}(\mathbb{P}^n_F)$ agisce in maniera libera e transitiva sulle collezioni di $n+2$ punti $\{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ di $\mathbb{P}^n_F$ in posizione generale.