Nome candidato:

PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE210
11 NOVEMBRE 2020

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia $V = \mathbb{Q}^2$ e si consideri la forma bilineare alterna non-degenere

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

(A) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{Sp}(V, B)$ è della forma

$$\eta_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{per una matrice } A \in M_{2,2}(\mathbb{Q}) \text{ tale che } \det A = 1.$$

(B) Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, scrivere η_A come prodotto di (al più 4) trasvezioni simplettiche.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Sia $V = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ e consideriamo le seguenti forme bilineare simmetriche su V

$$B_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 2x_1y_3 + 4x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_1 + 4x_3y_3,$$

$$B_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 2x_1y_3 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

(A) Calcolare il rango e il discriminante di B_1 e B_2.
(B) Trovare una base ortogonale di V rispetto alla quale la matrice di B_1 sia in forma canonica.
(C) Trovare una base ortogonale di V rispetto alla quale la matrice di B_2 sia in forma canonica.
(D) Dire (giustificando la risposta) se B_1 e B_2 sono equivalenti.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Sia $V = \mathbb{R}^3$ e consideriamo la seguente forme bilineare simmetrica su V

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = -2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 - 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2,$$

e il seguente operatore su V

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -6x_1 + 6x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Trovare una base ortogonale di V rispetto alla quale la matrice associata a B sia in forma canonica.
(B) Dimostrare che $\Phi \in O(V, B)$.
(C) Dire se $\Phi \in O^+(V, B)$ oppure $\Phi \in O^-(V, B)$.
(D) Scrivere Φ come prodotto di (al più 6) simmetrie.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Si consideri la seguente forma anti-Hermitiana su $V = \mathbb{C}^3$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = ix_1\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_1 - ix_2\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_3 + ix_3\overline{y}_2.$$

(A) Calcolare il rango di F.
(B) Determinare il radicale di F.
(C) Trovare una base di V rispetto alla quale la matrice di F sia in forma canonica.

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $B \in \mathrm{Bil}(V)$.
Mostrare che esistono due basi ordinate $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, \dots, f_n\}$ di V tali che

$$B(e_i, f_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq i = j \leq r, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove r è il rango di B.