Nome candidato:

**SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE210**
**15 GENNAIO 2021**

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

**ESERCIZIO 1** (9 punti)
Sia $T$ l'operatore su $\mathbb{C}^2$ definito da

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1+i)x + (1-i)y \\ (1-i)x + (1+i)y \end{pmatrix}.$$

(A) Dire se $T$ è normale e, in caso affermativo, si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $M_{\mathcal{B}}(T)$ è diagonale (e si scriva $M_{\mathcal{B}}(T)$).
(B) Dire se $T$ è unitario, Hermitiano, anti-Hermitiano, semipositivo, positivo.
(C) Trovare una decomposizione polare destra di $T$.

**ESERCIZIO 2** (7 punti)
Sia $S$ l'operatore su $\mathbb{R}^3$ definito da

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Dire se $S$ è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si trovi una base ortonormale $\mathcal{C}$ rispetto alla quale $M_{\mathcal{C}}(S)$ è diagonale (e si scriva $M_{\mathcal{C}}(S)$).
(B) Dire se $S$ è semipositivo e, in caso affermativo, si calcoli $\sqrt{S}$.

**ESERCIZIO 3** (8 punti)
(A) Trovare una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che manda i quattro punti

$$P_1 = [1,0,0], P_2 = [0,1,0], P_3 = [0,0,1], P_4 = [1,1,1]$$

nei quattro punti

$$R_1 = [1,1,-1], R_2 = [1,1,0], R_3 = [1,2,1], R_4 = [3,4,0].$$

(B) Si dica se esiste un'affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ che manda i quattro punti

$$Q_1 = (0,0), Q_2 = (1,0), Q_3 = (0,1), Q_4 = (1,1)$$

nei quattro punti

$$S_1 = (1,-1), S_2 = (1,0), S_3 = (2,1), S_4 = \left(\frac{4}{3}, 0\right),$$

e in caso affermativo si scriva una tale affinità.

**ESERCIZIO 4** (8 punti)
Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano affine $\Pi$ di equazioni cartesiane

$$\Pi : \{X_1 + X_2 = 1,$$

e la retta affine

$$r := \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ -t+1 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(A) Si scriva $\Pi$ in forma parametrica e $r$ in forma cartesiana.
(B) Si dica se $\Pi$ e $r$ sono parallele e si stabilisca se $\Pi$ e $r$ sono incidenti o sghembe.
(C) Si determinino equazioni cartesiane per le chiusure proiettive $\overline{\Pi}$ e $\overline{r}$ di, rispettivamente, $\Pi$ e $r$ in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.
(D) Si calcolino i punti all'infinito di $\Pi$ e $r$, cioè i sottospazi proiettivi $\overline{\Pi} \cap H_0$ e $\overline{r} \cap H_0$ (dove $H_0$ è l'iperpiano all'infinito).
(E) Si determini l'intersezione $\overline{\Pi} \cap \overline{r}$ e si calcoli $\dim(\overline{\Pi} + \overline{r})$.

**ESERCIZIO 5** (8 punti)
Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare.
Si consideri la seguente applicazione lineare

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathrm{End}(V) &\longrightarrow \mathrm{Bil}(V), \\ T \mapsto \mathcal{L}_T &: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &(x, y) \mapsto \mathcal{L}_T(x, y) := \langle T(x), y \rangle, \end{aligned}$$

(A) Dimostrare che $\mathcal{L}$ è un isomorfismo lineari di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.
[Suggerimento: basta (perché?) mostrare che $\mathcal{L}$ è iniettivo.]
(B) Dimostrare che $T$ è simmetrico se e solo se $\mathcal{L}_T$ è simmetrico.
(C) Dimostrare che $T$ è anti-simmetrico se e solo se $\mathcal{L}_T$ è anti-simmetrico.
(D) Dimostrare che $T$ è un operatore positivo se e solo se $\mathcal{L}_T$ è un prodotto scalare.