RISULTATI APPELLO A DEL CORSO GE210
30 GENNAIO 2021

ESERCIZIO 1 (7 punti)
Si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche su $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$:

$$B_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=4x_1y_1+3x_1y_2+3x_2y_1+2x_3y_3,$$

$$B_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+3x_1y_2+3x_2y_1+2x_1y_3+2x_3y_1+4x_3y_3.$$

(A) Calcolare il rango e il discriminante di B_1 e B_2. Dire se B_1 e B_2 sono equivalenti.
(B) Ridurre B_1 e B_2 a forma canonica.

Soluzioni:

(A) Le matrici di B_1 e B_2 rispetto alla base canonica $\mathcal{E}=\{e_1,e_2,e_3\}$ sono

$$M_{\mathcal{E}}(B_1)=\begin{pmatrix}4&3&0\\3&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad M_{\mathcal{E}}(B_2)=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&0&0\\2&0&4\end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinate delle matrici di sopra, si ottiene che

$$\det M_{\mathcal{E}}(B_1)=-18\quad \text{e}\quad \det M_{\mathcal{E}}(B_1)=-36.$$

Dunque, B_1 e B_2 sono entrambe di rango massimale 3 e il loro discriminante è

$$\operatorname{disc}(B_1)=[2]\in(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*/((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*)^2\quad \text{e}\quad \operatorname{disc}(B_1)=[4]\in(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*/((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*)^2.$$

Siccome $[2]\neq[4]$ in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*/((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*)^2$ (perché 2 non è un quadrato in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ mentre [4] lo è), allora $\operatorname{disc}(B_1)\neq\operatorname{disc}(B_2)$. Dunque B_1 e B_2 non sono equivalenti.

(B) Si consideri prima la forma bilineare B_1. Consideriamo il vettore $f_1:=e_1-e_2$, che ha la proprietà che $B_1(f_1,f_1)=1$. L'ortogonale di f_1 è uguale

$$\langle f_1\rangle^\perp=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3\ :4x_1+3x_2=0\right\}.$$

Il vettore $f_2:=3e_1+e_2$ ha la proprietà che $f_2\in\langle f_1\rangle^\perp$ e $B_1(f_2,f_2)=1$. Infine, il vettore $f_3:=e_3$ ha la proprietà che $f_3\in\langle f_1,f_2\rangle^\perp$ e $B_1(f_3,f_3)=2$. Dunque, rispetto alla base $\mathcal{F}:=\{f_1,f_2,f_3\}$, la forma bilineare B_1 è in forma canonica data da

$$M_{\mathcal{F}}(B_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Ragionando in maniera analoga, si trova una base $\mathcal{G}$ (*andava trovata la base*) di $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ rispetto alla quale B_2 ha forma canonica

$$M_{\mathcal{G}}(B_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2 (7 punti)

Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathcal{E}$ e il prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$. Si consideri la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A) Si consideri la forma bilineare simmetrica $B \in \mathrm{Bil}^s(\mathbb{R}^3)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = A$. Si trovi una base rispetto alla quale B è in forma canonica.

(B) Si consideri l'operatore $S \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(S) = A$. Si dica se S è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base ortonormale diagonalizzante e si scriva la matrice di S rispetto a tale base.

Soluzioni:

(A) Consideriamo il vettore $f_1 := \sqrt{2}e_1$, che ha la proprietà che $B(f_1, f_1) = -1$. L'ortogonale di f_1 è uguale

$$\langle f_1 \rangle^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : -x_1 + 3x_2 = 0 \right\}.$$

Il vettore $f_2 := \frac{3e_1+e_2}{2}$ ha la proprietà che $f_2 \in \langle f_1 \rangle^{\perp}$ e $B(f_2, f_2) = 1$. Infine, il vettore $f_3 := \sqrt{2}e_3$ ha la proprietà che $f_3 \in \langle f_1, f_2 \rangle^{\perp}$ e $B(f_3, f_3) = 1$. Dunque, rispetto alla base $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$, la forma bilineare B è in forma canonica data da

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(B) Dal Teorema spettrale su $\mathbb{R}$, segue che l'operatore S è ortonomalmente diagonalizzabile perché esso è simmetrico, in quanto la matrice di S rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ (che è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$), cioè la matrice A, è simmetrica.

Per trovare una base diagonalizzante ortonormale, calcoliamo prima il polinomio caratteristico (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\chi_S(T) = \chi_A(T) = \det(T \cdot I_3 - A) = (T-1)(T+2)\left(T - \frac{1}{2}\right).$$

Gli autospazi relativi ai tre autovalori $\left\{1, -2, \frac{1}{2}\right\}$ di S sono (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_1(T) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \quad \mathcal{E}_{-2}(T) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \quad \mathcal{E}_{1/2}(T) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Dunque una base ortonormale diagonalizzante per S è

$$\mathcal{G} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

rispetto a cui la matrice di S è

$$M_{\mathcal{G}}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Su $\mathbb{C}^2$, si consideri la forma sesquilineare Hermitiana

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 5x_1\overline{x}_2 - 3ix_1\overline{y}_2 + 3iy_1\overline{x}_2 + 2y_1\overline{y}_2,$$

e l'operatore lineare

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ \left(\frac{3}{2} + 3i\right) x + iy \end{pmatrix}$$

(A) Trovare una base di $\mathbb{C}^2$ rispetto alla quale B è in forma canonica. Dedurre che B definisce un prodotto scalare su $\mathbb{C}^2$.

(B) Si dica se T è ortonormalmente diagonalizzabile rispetto allo spazio vettoriale unitario $(\mathbb{C}^2, B)$ e, in caso affermativo, trovare una base ortonormalmente diagonalizzabile.

(C) Si dica se $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, B)$ è normale, Hermitiano, anti-Hermitiano, unitario, positivo o semipositivo.

Soluzioni:

(A) Con il metodo dei complementi ortogonali (*qua andavano inseriti e spiegati i conti*), si trova la base

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

rispetto a cui la forma sesquilineare Hermitiana B ha la forma canonica

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome la segnatura di B è $(2, 0)$, allora B definisce un prodotto scalare su $\mathbb{C}^2$.

(B) Ci sono due possibili metodi di risoluzione.

<u>Primo Metodo:</u>

Calcoliamo la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{F}$ calcolata nel punto precedente (*qua andavano inseriti i conti*)

$$M_{\mathcal{F}}(T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}} \cdot M_{\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+i & -2i-1 \\ 2i+1 & 2+i \end{pmatrix}.$$

Dal Teorema spettrale su $\mathbb{C}$, T è ortonomalmente diagonalizzabile in quanto $M_{\mathcal{F}}(T)$ è normale (*qua andavano inseriti i conti*) e $\mathcal{F}$ è un base ortonormale per $(\mathbb{C}^2, B)$ (come mostrato nel punto (A)).

Per trovare una base ortonormale diagonalizzante per T, calcoliamo il polinomio caratteristico di T (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\chi_T(X) = X^2 - (2+i)X + 2i = (X-2)(X-i).$$

Gli autospazi di T relativi ai suoi autovalori $\{2, i\}$ sono (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_2(T) = \langle \begin{pmatrix} \frac{-2i}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_i(T) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Dunque una base ortonormale diagonalizzante per T è

$$\mathcal{G} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2i \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\},$$

rispetto a cui la matrice di T è

$$M_{\mathcal{G}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Secondo Metodo:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di T (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\chi_T(X) = X^2 - (2+i)X + 2i = (X-2)(X-i).$$

Gli autospazi di T relativi ai suoi autovalori $\{2, i\}$ sono (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_2(T) = \langle \begin{pmatrix} \frac{-2i}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_i(T) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Dunque

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-2i}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base diagonalizzante per T.

Siccome i due vettori di $\mathcal{H}$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare B (*qua andavano inseriti i conti*), allora ortonormalizzando i vettori di $\mathcal{H}$ rispetto a B (*qua andavano inseriti i conti*) giungiamo alla base

$$\mathcal{G} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2i \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

che è ortonormale per $(\mathbb{C}^2, B)$ e ancora diagonalizzante per T. Dunque T è ortonormalmente diagonalizzante e una base ortonormale diagonalizzante per T è la base $\mathcal{G}$, rispetto a cui la matrice di T è

$$M_{\mathcal{G}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

(C) Dal punto (B) sappiamo che T è ortonormalmente diagonalizzabile con autovalori 2 e i. Dunque dal teorema di struttura degli operatori normali complessi e degli operatori speciali, sappiamo che:
- T è normale perché ortonormalmente diagonilazzibile;
- T non è Hermitiano (e dunque nemmeno positivo o semipositivo) perché ha un autovalore non reale;
- T non è antiHermitiano perché ha un autovalore non immaginario puro;
- T non è unitario perché ha un autovalore non di norma uno.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ si considerino i due sottospazi affini

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{e} \qquad T : \begin{cases} X_3 - X_4 = 0 \\ X_2 + X_4 = 1. \end{cases}$$

Siano $\overline{S}$ e $\overline{T}$ le chiusure proiettive in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ di, rispettivamente, S e T.

(A) Si scrivano S in forma cartesiana e T in forma parametrica, e si calcoli la loro dimensione.

(B) Si dica se S e T sono paralleli e si stabilisca se S e T sono incidenti o sghembi.
(C) Si determini l'intersezione $\overline{S} \cap \overline{T}$ e si calcoli $\dim(\overline{S} + \overline{T})$.
(D) Si considerino i punti all'infinito di S e T, cioè i sottospazi proiettivi $S_\infty := \overline{S} \cap H_0$ e $T_\infty := \overline{T} \cap H_0$ (dove H_0 è l'iperpiano all'infinito). Si determini $S_\infty \cap T_\infty$ e si calcoli $\dim(S_\infty + T_\infty)$.

Soluzioni:

(A) S ha dimensione due ed equazioni cartesiane (*qua andavano inseriti i conti*)

$$S : \begin{cases} X_2 = 1, \\ X_2 - X_3 = 0. \end{cases}$$

T ha dimensione due ed equazioni parametriche (*qua andavano inseriti i conti*)

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s+1 \\ -s \\ -s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(B) Siccome le giaciture di S e T non coincidono, allora S e T non sono paralleli. Per trovare l'intersezione tra S e T dobbiamo risolvere il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} X_2 = 1, \\ X_2 - X_3 = 0, \\ X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 + X_4 = 1. \end{cases}$$

Siccome tale sistema è incompatibile (*qua andavano inseriti i conti*), allora S e T non si intersecano e dunque sono sghembi.

(C) Le equazioni cartesiane di $\overline{S}$ e $\overline{T}$ si ottengono omogeneizzando le equazioni cartesiane di S e T, e dunque sono uguali a

$$\overline{S} : \begin{cases} X_2 - X_0 = 0, \\ X_2 - X_3 = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \overline{T} : \begin{cases} X_3 - X_4 = 0 \\ X_2 + X_4 - X_0 = 0. \end{cases}$$

L'intersezione tra $\overline{S}$ e $\overline{T}$ è uguale a (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\overline{S} \cap \overline{T} = \{[0, 1, 0, 0, 0]\}.$$

Dalla formula di Grassmann proiettiva, otteniamo

$$\dim(\overline{S} + \overline{T}) = \dim(\overline{S}) + \dim(\overline{T}) - \dim(\overline{S} \cap \overline{T}) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

(D) Siccome $S_\infty \cap T_\infty \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$ e il punto $[0, 1, 0, 0, 0]$ di intersezione tra $\overline{S}$ e $\overline{T}$ appartiene all'iperpiano all'infinito H_0, deduciamo che

$$S_\infty \cap T_\infty = \{[0, 1, 0, 0, 0]\}.$$

Dalla formula di Grassmann proiettiva, otteniamo

$$\dim(S_\infty + T_\infty) = \dim(S_\infty) + \dim(T_\infty) - \dim(S_\infty \cap T_\infty) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

ESERCIZIO 5 (10 punti)

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario e sia $P : V \to V$ un operatore tale che $P^2 = P$ (un tale operatore si chiama idempotente).

(A) Dimostrare che $1 - P$ è idempotente, dove $1 := \mathrm{id}_V$.
(B) Dimostrare che $\ker P = \operatorname{Im}(1 - P)$ e $\operatorname{Im} P = \ker(1 - P)$.
(C) Dimostrare che $V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$.

(D) Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.
   (b) $\ker P$ è ortogonale a $\operatorname{Im} P$.
   (c) P è semipositivo.
   (d) P è autoaggiunto.
   (e) P è normale.

Soluzioni:

(A) Usando che $P^2 = P$, calcoliamo

$$(1-P)^2 = (1-P)\circ(1-P) = 1\circ 1 - 1\circ P - P\circ 1 + P\circ P = 1 - P - P + P = 1 - P.$$

(B) Usando $P^2 = P$ otteniamo che

$$P((1-P)(x)) = P(x) - P^2(x) = 0 \text{ per ogni } x \in V \Rightarrow \ker(P) \supseteq \operatorname{Im}(1-P).$$

Usando la relazione $1 = P + (1-P)$, abbiamo che, per ogni $x \in V$:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x = 1(x) = P(x) + (1-P)(x) = (1-P)(x),$$

da cui deduciamo che $\ker(P) \subseteq \operatorname{Im}(1-P)$. Dunque concludiamo che $\ker(P) = \operatorname{Im}(1-P)$.

Applicando lo stesso ragionamento a $1-P$ (che è idempotente per (A)), deduciamo che $\ker(1-P) = \operatorname{Im}(P)$.

(C) Usando che $\operatorname{Im}(P) = \ker(1-P)$, otteniamo

$$x \in \ker(P)\cap\operatorname{Im}(P) \Rightarrow 0 = (1-P)(x) = x - P(x) = x.$$

Dunque $\ker(P)\cap\operatorname{Im}(P) = \{0\}$.

Dal fatto che $1 = P + (1-P)$ e usando che $\operatorname{Im}(1-P) = \ker(P)$, otteniamo che

$$x = P(x) + (1-P)(x) \in \operatorname{Im}(P) + \ker(P) \Rightarrow V = \operatorname{Im}(P) + \ker(P).$$

Combinando ciò che mostrato sopra, concludiamo che $V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$.

(D) Mosteremo una catena di implicazioni.

- *(b)* $\Rightarrow$ *(a)* : infatti, combinando (C) e l'ipotesi (b) si ottiene che

  $$V = \operatorname{Im} P \oplus^{\perp} \ker P = \operatorname{Im} P \oplus^{\perp} (\operatorname{Im} P)^{\perp}.$$

  Questo implica che, dato un elemento $x \in V$, possiamo scrivere

  $$x = P(y) + z \text{ con } z \in \ker P = (\operatorname{Im} P)^{\perp}.$$

  Applicando P alla relazione precedente e usando $P^2 = P$, otteniamo

  $$P(x) = P^2(y) = P(y),$$

  che implica che P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.
- *(a)* $\Rightarrow$ *(b)*: consideriamo la decomposizione ortogonale

  $$V = \operatorname{Im} P \oplus^{\perp} (\operatorname{Im} P)^{\perp}.$$

  Siccome P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$ per l'ipotesi (a), segue che $(\operatorname{Im} P)^{\perp} = \ker P$, che implica (b).
- *(a)* $\Rightarrow$ *(c)*.
  Infatti, usando che P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$, mettendo insieme una base ortonormale di $\operatorname{Im} P$ con una base ortonormale di $(\operatorname{Im} P)^{\perp}$ si ottiene una base ortonormale $\mathcal{E}$ di $(V, \langle -, - \rangle)$ tale che

  $$M_{\mathcal{E}}(P) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_s \end{pmatrix}.$$

Da ciò segue che P è un operatore semipositivo.

- $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$: ovvie.
- $(e) \Rightarrow (a)$: siccome $P^2 = P$, allora gli autovalori di P sono 0 e 1. Dunque, applicando il teorema spettrale du $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, segue che P è ortonormalmente diagonalizzabile e pi̇̀precisamente che esiste una base ortonormale $\mathcal{E}$ di $(V, \langle -, - \rangle)$ tale che
$$M_{\mathcal{E}}(P) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_s \end{pmatrix}.$$
Questo implica che P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.