SOLUZIONI DELL'APPELLO C DEL CORSO GE210
16 GIUGNO 2021

ESERCIZIO 1 (8 punti)

Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la base canonica $\mathcal{E}$ e il prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) Si consideri la forma bilineare $B \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^2)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = A$. Si trovi una decomposizione $B = B^s + B^a$, con B^s forma bilineare simmetrica e B^a forma bilineare antisimmetrica.

(B) Si trovi una base di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica B^s è in forma canonica.

(C) Si consideri l'operatore $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(\Phi) = A$. Si dica se Φ è normale e, in caso affermativo, si riduca a forma canonica.

(D) Si trovi una decomposizione polare di Φ.

Soluzione:

(A) La decomposizione $B = B^s + B^a$ con B^s forma bilineare simmetrica e B^a forma bilineare antisimmetrica si ottiene usando le formule

$$B^s(x, y) = \frac{B(x, y) + B(y, x)}{2} \qquad \text{e} \qquad B^a(x, y) = \frac{B(x, y) - B(y, x)}{2}.$$

Dunque

$$M_{\mathcal{E}}(B^s) = \frac{M_{\mathcal{E}}(B) + M_{\mathcal{E}}(B)^t}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{E}}(B^a) = \frac{M_{\mathcal{E}}(B) - M_{\mathcal{E}}(B)^t}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(B) Osserviamo che il vettore e_1 è tale che $B^s(e_1, e_1) = 1$. L'ortogonale di e_1 rispetto a B_1 è uguale a

$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle e_1 + 2e_2 \rangle.$$

Siccome $B(e_1 + 2e_2, e_1 + 2e_2) = 7$, allora rispetto alla base

$$\mathcal{C} := \{e_1, \frac{e_1 + 2e_2}{\sqrt{7}}\},$$

la forma bilineare è in forma canonica

$$M_{\mathcal{C}}(B^s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(C) L'operatore non è normale perché, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ che è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard, si ha che

$$M_{\mathcal{E}}(\Phi \circ \Phi^a) = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = A^t \cdot A = M_{\mathcal{E}}(\Phi^a \circ \Phi).$$

(D) Siccome l'operatore Φ è invertibile, la decomposizione polare destra è unica ed è data da

$$\Phi = Q \circ P \text{ con } P := \sqrt{\Phi^a \circ \Phi} > 0 \quad \text{ e } \quad Q = \Phi \circ P^{-1} \text{ ortogonale.}$$

Passando alle matrici rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, si ha

$$M_{\mathcal{E}}(P) = \sqrt{A^t \cdot A} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{E}}(Q) = M_{\mathcal{E}}(\Phi) \cdot M_{\mathcal{E}}(P)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito della base canonica $\mathcal{E}$ e del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$. Si consideri la matrice reale

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A) Si consideri la forma antisimmetrica $B \in \mathrm{Bil}^a(\mathbb{R}^3)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = A$. Si riduca B a forma canonica.

(B) Si consideri l'operatore $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{E}}(\Phi) = A$. Si dica se Φ è normale e, in caso affermativo, si riduca Φ a forma canonica.

(C) Si determinino tutte le decomposizioni polari destre di Φ.

Soluzione:

(A) Una coppia iperbolica per B è data da

$$f_1 := e_1, f_2 := \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}}.$$

L'ortogonale di $\langle f_1, f_2 \rangle$ è generato da $f_3 := \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}}$ che genera il radicale di B. Dunque rispetto alla base

$$\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\},$$

la forma antisimmetrica B è in forma canonica data da

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(B) L'operatore Φ e' antisimmetrico in $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$, e dunque normale, perché la matrice $M_{\mathcal{E}}(\Phi)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, che e' ortonormale rispetto al prodotto scalare $\langle -, - \rangle$, e' antisimmetrica. La base $\mathcal{F}$ trovata nel punto precedente e' ortonormale e riduce Φ a forma canonica

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(C) Ogni decomposizione polare destra

(0.1) $$\Phi = Q \circ P \text{ con } P > 0 \quad \text{ e } \quad Q \text{ ortogonale}$$

e' tale che $P := \sqrt{\Phi^a \circ \Phi}$. Passando alle matrici rispetto alla base ortonormale $\mathcal{F}$, otteniamo che

$$M_{\mathcal{F}}(P) = \sqrt{M_{\mathcal{F}}(B)^t \cdot M_{\mathcal{F}}(B)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I possibili operatori ortogonali Q che verificano (0.1) sono tali che la matrice $M_{\mathcal{F}}(Q)$ e' ortogonale e verifica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{F}}(\Phi) = M_{\mathcal{F}}(Q) \cdot M_{\mathcal{F}}(P) = M_{\mathcal{F}}(Q) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.2}$$

Si verifica facilmente che le uniche matrici ortogonali $M_{\mathcal{F}}(Q)$ che verificano (0.2) sono

$$M_{\mathcal{F}}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Sullo spazio vettoriale $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2.$$

$$C\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2.$$

(A) Si calcolino il rango e il discriminante di B e C e si dica se B e C sono equivalenti oppure no.
(B) Si riducano B e C a forma canonica.
(C) Si determinino tutti gli elementi di $O(V, B)$ e di $O(V, C)$. Che cardinalità hanno $O(V, B)$ e $O(V, C)$?
(D) È vero o no che ogni elemento di $O^-(V, B)$ o di $O^-(V, C)$ è una simmetria? Si giustifichi la risposta.

Soluzione:

(A) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di V. Si calcola facilmente che

$$\det M_{\mathcal{E}}(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det M_{\mathcal{E}}(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

Dunque B e C hanno entrambe rango 2 ma non sono equivalenti visto che

$$\operatorname{disc}(B) = [1] \neq [2] = \operatorname{disc}(C),$$

dove abbiamo usato che 1 e' un quadrato in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$ mentre 2 non lo e'.

(B) Col solito metodo dei complementi ortogonali (*qua andavano inseriti i conti*), si trova che rispetto alla base

$$\mathcal{F} := \{f_1 := e_1, f_2 := e_1 + e_2\}$$

le forme bilineari simmetriche B e C sono ridotte a forma canonica

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{F}}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{0.3}$$

(C) Un operatore invertibile $\Phi \in \mathrm{GL}(V)$ e' un isometria rispetto a B se e solo se la matrice di Φ rispetto a $\mathcal{F}$ soddisfa la relazione

$$M_{\mathcal{F}}(\Phi)^t \cdot M_{\mathcal{F}}(B) \cdot M_{\mathcal{F}}(\Phi) = M_{\mathcal{F}}(B). \tag{0.4}$$

Se scriviamo la matrice di Φ rispetto a $\mathcal{F}$ come $M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e utilizziamo (0.3), la relazione (0.4) si traduce nel sistema

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = 1, \\ b^2 + d^2 = 1, \\ ab + cd = 0. \end{cases} \tag{0.5}$$

Siccome i quadrati in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sono 0 e 1, dalle prime due equazioni del sistema precedente otteniamo che

$$(a, d) = (0, \pm 1) \text{ oppure } (\pm 1, 0),$$
$$(b, c) = (0, \pm 1) \text{ oppure } (\pm 1, 0),$$

Utilizzando la terza equazione nel sistema (0.5), otteniamo che le uniche soluzioni del sistema (0.5) sono

$$(a, b, c, d) = (0, \pm 1, \pm 1, 0) \text{ oppure } (\pm 1, 0, 0, \pm 1).$$

Dunque il gruppo ortogonale rispetto a B e' dato da

$$O(V, B) = \{\Phi \in \mathrm{GL}(V)\ : M_{\mathcal{F}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

In particolare, $O(V, B)$ e' un gruppo di 8 elementi.

Ragionando in maniera simile si ottiene che

$$O(V, C) = \{\Psi \in \mathrm{GL}(V)\ : M_{\mathcal{F}}(\Psi) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\}.$$

Dunque $O(V, B)$ e' un gruppo di 4 elementi.

(D) In base al punto (C), l'insieme $O^-(V, B)$ consiste di 4 elementi e tutti questi elementi sono simmetrie in quanto (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{F}}(\sigma_{f_1}),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{F}}(\sigma_{f_2}),$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{F}}(\sigma_{f_1+f_2}),$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{F}}(\sigma_{f_1-f_2}).$$

In maniera simile (*qua andavano inseriti i conti*) si mostra che i due elementi di $O^-(V, C)$ sono simmetrie.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Consideriamo lo spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$.

(A) Sia S il piano di $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ che contiene i tre punti

$$P_1 = [1,0,1,0,1], P_2 = [0,1,0,0,0], P_3 = [0,0,0,1,1].$$

Si scriva S in forma cartesiana.

(B) Sia T la retta di $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ che contiene i due punti

$$Q_1 = [1,0,1,0,-1], Q_2 = [1,1,1,0,-1].$$

Si scriva T in forma parametrica.

(C) Si determini $S \cap T$ in forma parametrica e $S + T$ in forma cartesiana.

(D) Sia $\mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ l'inclusione standard e si considerino i sottospazi affini $S_0 := S \cap \mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}}$ e $T_0 := T \cap \mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}}$. Si determini $S_0 \cap T_0$ in forma parametrica e $S_0 + T_0$ in forma cartesiana.

Soluzione:

(A) S è un sottospazio proiettivo di dimensione 2 che ha la forma parametrica

$$S = \mathbb{P}\left(\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle\right).$$

Col solito metodo per passare alla forma parametrica a quella cartesiana (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che la forma cartesiana di S è:

$$S : \begin{cases} X_0 - X_2 = 0, \\ X_0 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

(B) La forma parametrica per T è uguale a

$$T = \mathbb{P}\left(\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle\right) = \left\{[\lambda+\mu, \mu, \lambda+\mu, 0, \lambda-\mu] \ : (\lambda,\mu) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\}.$$

(C) Notiamo che il punto $P = [0,1,0,0,0]$ appartiene a $S \cap T$. Siccome $T \subsetneq S$, allora $P = S \cap T$. Dalla formula di Grassmann proiettiva, segue che $\dim(S+T) = 3$. Siccome l'iperpiano di equazione $X_0 - X_2 = 0$ contiene S e T, deduciamo che

$$S + T : \{X_0 - X_2 = 0$$

(D) Siccome $P = S \cap T$ e $P \notin \mathbb{A}^4_{\mathbb{Q}}$, allora $S_0 \cap T_0 \neq \emptyset$. Siccome $S + T$ ha equazione cartesiana $X_0 - X_2 = 0$, allora $S_0 \cap T_0$ ha equazione cartesiana cartesiana $X_2 = 1$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)

(A) Sia (V, B) uno spazio simplettico non-degenere. Dimostrare che ogni elemento del gruppo simplettico $\mathrm{Sp}(V, B)$ ha determinante uguale a 1.

[Suggerimento: usare le trasvezioni simplettiche.]

(B) Sia (V, B) uno spazio ortogonale non-degenere su un campo K di caratteristica diversa da 2. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) (V, B) è un *piano ortogonale iperbolico*, cioè esiste una base $\{u, v\}$ tale che $B(u,u) = B(v,v) = 0$ e $B(u,v) = 1$.

(ii) esiste un vettore isotropico non nullo;

(iii) il discriminante $\mathrm{disc}(B)$ di B è $[-1] \in K^*/(K^*)^2$.

Soluzione:

(A) Siccome $\mathrm{Sp}(V,B)$ è generato dalle trasvezioni simplettiche, allora basta mostrare che $\det(\tau_{v,a}) = 1$ per ogni $v \in V$ e $a \in K$.

Se $v = 0$, allora $\tau_{v,a} = \mathrm{id}$, che ha determinante uguale a 1. Se invece $v \neq 0$, allora possiamo completare v ad una base simplettica

$$\mathcal{F} = \{v_1, u_1, v_2, u_2, \dots, v_n, u_n\}$$

di V. Allora dalla definizione $\tau_{v,a}(x) := x + aB(x,v)v$, segue che

$$M_{\mathcal{F}}(\tau_{v,a}) = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Dunque $\tau_{v,a}$ ha determinante uguale a 1.

(B) Mostreremo le varie implicazioni.

$(i) \Rightarrow (ii)$ segue dal fatto che u (oppure v) e' un vettore isotropico non nullo.

$(ii) \Rightarrow (i)$: sia u un vettore isotropico non nullo. Siccome B e' non-degenere, allora esiste $w \in V$ tale che $B(u,w) \neq 0$. Una base iperbolica di (V,B) e' formata da u e $v := \frac{w}{B(u,w)}$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ segue dal fatto che

$$\mathrm{disc}(B) = [\det M_{\{u,v\}}(B)] = [\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] = [-1].$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$: scegliamo una base $\mathcal{F} = \{e_1, e_2\}$ di V e scriviamo

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

L'ipotesi $\mathrm{disc}(B) = [-1] \in K^*/(K^*)^2$ equivale al fatto che

$$-\det M_{\mathcal{F}}(B) = -(ad - b^2) = b^2 - ad \in (K^*)^2. \tag{0.6}$$

Dato $u = xe_1 + be_2 \in V$, abbiamo che

$$B(u,u) = ax^2 + 2bxy + dy^2. \tag{0.7}$$

Se $a = 0$ allora e_1 è un vettore non nullo isotropo. Se invece $a \neq 0$ allora consideriamo i due elementi di K

$$x_{\pm} := \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

che esistono grazie all'ipotesi (0.6). Allora, usando la formula (0.7), segue che i due vettori $u_{\pm} = x_{\pm}e_1 + e_2$ sono non nulli e isotropi per B.