SOLUZIONI DELLA PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE210
11 NOVEMBRE 2020

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia $V = \mathbb{Q}^2$ e si consideri la forma bilineare alterna non-degenere

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

(A) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{Sp}(V, B)$ è della forma

$$\eta_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{per una matrice } A \in M_{2,2}(\mathbb{Q}) \text{ tale che } \det A = 1.$$

(B) Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, scrivere η_A come prodotto di (al più 4) trasvezioni simplettiche.

Soluzione:

(A) Ogni endomorfismo di V è della forma η_A per un'unica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di V, abbiamo che

$$M_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_{\mathcal{E}}(\eta_A) = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Un endomorfismo η_A è un isometria se e solo se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}(B) = M_{\mathcal{E}}(\eta_A)^t \cdot M_{\mathcal{E}}(B) \cdot M_{\mathcal{E}}(\eta_A) = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ -ad + bc & 0 \end{pmatrix},$$

cioè se e solo se $\det A = 1$.

(B) L'endomorfismo η_A (che è un'isometria per il punto (A)) manda la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ (che è una coppia iperbolica rispetto a B) nella coppia iperbolica

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La trasvezione simplettica $\tau_1 := \tau_{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},1}$ manda la coppia iperbolica $\{e_1, e_2\}$ in

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La trasvezione simplettica $\tau_2 := \tau_{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix},-\frac{1}{2}}$ manda la coppia iperbolica $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$.

Dunque la composizione $\tau_2 \circ \tau_1$ manda la coppia iperbolica $\mathcal{E}$ nella coppia iperbolica $\mathcal{G}$, e dunque deve coincidere con η_A.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Sia $V = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ e consideriamo le seguenti forme bilineare simmetriche su V

$$B_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1+4x_1y_2+2x_1y_3+4x_2y_1+x_2y_2+2x_3y_1+4x_3y_3,$$

$$B_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1+4x_1y_2+2x_1y_3+4x_2y_1+2x_2y_2+x_2y_3+2x_3y_1+x_3y_2+x_3y_3.$$

(A) Calcolare il rango e il discriminante di B_1 e B_2.
(B) Trovare una base ortogonale di V rispetto alla quale la matrice di B_1 sia in forma canonica.
(C) Trovare una base ortogonale di V rispetto alla quale la matrice di B_2 sia in forma canonica.
(D) Dire (giustificando la risposta) se B_1 e B_2 sono equivalenti.

Soluzione:

(A) Le matrici di B_1 e B_2 rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $V = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ sono uguali a

$$\begin{cases} M_{\mathcal{E}}(B_1) = \begin{pmatrix}2&4&2\\4&1&0\\2&0&4\end{pmatrix}, \\ M_{\mathcal{E}}(B_2) = \begin{pmatrix}2&4&2\\4&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}. \end{cases}$$

I discriminanti di B_1 e B_2 sono uguali a (*qua andavao inseriti i conti*)

$$\begin{cases} \Delta(B_1) = [\det M_{\mathcal{E}}(B_1)] = 0, \\ \Delta(B_2) = [\det M_{\mathcal{E}}(B_2)] = 4. \end{cases}$$

Dunque il rango di B_2 è 3 mentre il rango di B_1 è uguale a 2 visto che le prime due colonne di $M_{\mathcal{E}}(B_1)$ non sono proporzionali tra di loro mentre il determinante di $M_{\mathcal{E}}(B_1)$ è zero.

(B) Osserviamo che $B_1(e_2, e_2) = 1$. L'ortogonale di $\langle e_2\rangle$ è uguale a

$$\langle e_2\rangle^\perp = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \; : 4x_1 + x_2 = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_1\\x_3\end{pmatrix} \; : x_1, x_3 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right\},$$

mentre la restrizione di B_1 a $\langle e_2\rangle^\perp$ è uguale a

$$B_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_1\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_1\\y_3\end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_3y_3.$$

Osserviamo che $e_1 + e_2 \in \langle e_2\rangle^\perp$ e che $B_1(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 1$. L'ortogonale di $\langle e_2, e_1 + e_2\rangle$ è uguale a

$$\langle e_2, e_1+e_2\rangle^\perp = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_1\\x_3\end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \; : x_1 + 2x_3 = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}3x_3\\3x_3\\x_3\end{pmatrix} \; : x_3 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right\},$$

mentre la restrizione di B_1 a $\langle e_2, e_1+e_2\rangle^\perp$ è identicamente nulla. Dunque una base ortogonale per B_1 è $\mathcal{F} := \{e_2, e_1+e_2, 3e_1+3e_2+e_3\}$ e la matrice di B_1 rispetto a $\mathcal{F}$ è uguale a

$$M_{\mathcal{F}}(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(C) Osserviamo che $B_2(e_3, e_3) = 1$. L'ortogonale di $\langle e_3\rangle$ è uguale a

$$\langle e_3\rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \ : x_1 + x_2 + x < -3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} \ : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\},$$

mentre la restrizione di B_2 a $\langle e_3\rangle^\perp$ è uguale a

$$B_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -y_1 - 2y_3 \end{pmatrix} \right) = -2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2.$$

Osserviamo che $e_2 - e_3 \in \langle e_3\rangle^\perp$ e che $B_2(e_2 - e_3, e_2 - e_3) = 1$. L'ortogonale di $\langle e_3, e_2 - e_3\rangle$ è uguale a

$$\langle e_3, e_2 - e_3\rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \ : 2x_1 + x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \ : x_1 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\},$$

Osserviamo che $e_1 + 3e_2 \in \langle e_3, e_2 - e_3\rangle^\perp$ e vale che $B_2(e_1 + 3e_2, e_1 + 3e_2) = 4$.

Dunque una base ortogonale per B_2 è $\mathcal{F} := \{e_3, e_2 - e_3, e_1 + 3e_2\}$ e la matrice di B_2 rispetto a $\mathcal{G}$ è uguale a

$$M_{\mathcal{G}}(B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(D) B_1 e B_2 non sono equivalenti perché $\mathrm{rg}(B_1) = 2 \neq 3 = \mathrm{rg}(B_3)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Sia $V = \mathbb{R}^3$ e consideriamo la seguente forme bilineare simmetrica su V

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = -2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 - 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2,$$

e il seguente operatore su V

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -6x_1 + 6x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Trovare una base ortogonale di V rispetto alla quale la matrice associata a B sia in forma canonica.
(B) Dimostrare che $\Phi \in O(V, B)$.
(C) Dire se $\Phi \in O^+(V, B)$ oppure $\Phi \in O^-(V, B)$.
(D) Scrivere Φ come prodotto di (al più 6) simmetrie.

Soluzione:

(A) Sia $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo il vettore $f_1 := e_2$ che è tale che $B(f_1, f_1) = 1$. L'ortogonale di $\langle f_1 \rangle$ è uguale a

$$\langle f_1 \rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}. \tag{0.1}$$

Scelgo il vettore $f_2 := e_2 + \frac{e_3}{2} \in \langle f_1 \rangle^\perp$ che è tale che $B(f_2, f_2) = -1$. L'ortogonale di $\langle f_1, f_2 \rangle$ è uguale a

$$\langle f_1, f_2 \rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, 5x_1 - 4x_3 = 0 \right\} = \langle 4e_1 + 2e_2 + 5e_3 \rangle.$$

Siccome $B(4e_1 + 2e_2 + 5e_3, 4e_1 + 2e_2 + 5e_3) = 40$, allora il vettore $f_3 := \frac{1}{2\sqrt{10}}(4e_1 + 2e_2 + 5e_3)$ è tale che $B(f_3, f_3) = 1$. Dunque una base ortogonale di V rispetto a B è $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$ e vale che

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque la segnatura di B è $(2, 1)$.

(B) L'operatore Φ è appartiene a $O(V, B)$ perché vale che (*inserire i conti*)

$$M_{\mathcal{E}}(B) = M_{\mathcal{E}}(\Phi)^t \cdot M_{\mathcal{E}}(B) \cdot M_{\mathcal{E}}(\Phi).$$

(C) La matrice di Φ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è

$$M_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, facendo lo sviluppo di Laplace lungo l'ultima colonna, otteniamo che

$$\det \Phi = \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -1.$$

Dunque $\Phi \in O^-(V, B)$.

(D) Consideriamo la base ortogonale $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$ calcolata in (A).

Siccome $f_1 - \Phi(f_1) = -4e_1 - 2e_2 - 6e_3$ è anisotropo, allora la simmetria

$$\eta_1 := \sigma_{-4e_1 - 2e_2 - 6e_3}$$

è tale che $\eta_1(f_1) = \Phi(f_1) = 4e_1 + 3e_2 + 6e_3$. Dunque $\widetilde{\Phi} := \eta_1 \circ \Phi$ è un'isometria che fissa f_1.

Siccome il vettore $f_2 - \widetilde{\Phi}(f_2)$ è anisotropo (*qua andavano inseriti i conti*), allora la simmetria

$$\eta_2 := \sigma_{f_2 - \widetilde{\Phi}(f_2)}$$

è tale che $\eta_2(f_2) = \widetilde{\Phi}(f_2)$. Dunque $\widetilde{\widetilde{\Phi}} := \eta_2 \circ \eta_1 \circ \Phi$ è un'isometria che fissa f_1 e f_2.

Siccome la restrizione di $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$ a $\langle f_1, f_2 \rangle^\perp = \langle f_3 \rangle$ è un'isometria di determinante -1 (perché Φ ha determinante uguale a -1 il punto (C)), allora $\widetilde{\widetilde{\Phi}}(f_3) = -f_3$. Dunque la simmetria

$$\eta_3 := \sigma_{2f_3}$$

è tale che $\eta_3(f_3) = \tilde{\tilde{\tilde{\Phi}}}(f_3)$. Ne deduciamo che $\eta_3 \circ \eta_2 \circ \eta_1 \circ \Phi$ fissa f_1, f_2 e f_3 ed è dunque l'identità, il che implica che

$$\Phi = \eta_1 \circ \eta_2 \circ \eta_3.$$

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Si consideri la seguente forma anti-Hermitiana su $V = \mathbb{C}^3$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = ix_1\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_1 - ix_2\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_3 + ix_3\overline{y}_2.$$

(A) Calcolare il rango di F.
(B) Determinare il radicale di F.
(C) Trovare una base di V rispetto alla quale la matrice di F sia in forma canonica.

Soluzione:
La matrice di F rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{C}^3$ è data da

$$M_{\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & -i & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

(A) Eseguendo l'eliminazione di Gauss (*qua andavano inseriti i conti*) si vede che $\operatorname{rk} M_{\mathcal{E}}(F) = 2$, e dunque che $\operatorname{rk}(F) = 2$.
(B) Il radicale di F coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti uguale a $M_{\mathcal{E}}(F)$. Risolvendo tale sistema (*qua andavano inseriti i conti*) si vede che

$$\operatorname{rad}(F) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C) Osserviamo che $F(e_2, e_2) = -i$ e dunque poniamo $f_1 := e_2$. L'ortogonale di $\langle f_1 \rangle$ è uguale a

$$\langle f_1 \rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t \in \mathbb{C}^3 : 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t \cdot M_{\mathcal{E}}(F) \cdot e_2 = ix - iy + iz \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Osserviamo che $F(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = i$ e dunque poniamo $f_2 := e_1 + e_2$. Infine poniamo $f_3 := -e_1 + e_3$, che è un generatore del radicale di F. Dunque rispetto alla base $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$ di V, la matrice di F è diagonale della forma

$$M_{\mathcal{F}}(F) = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $B \in \operatorname{Bil}(V)$.
Mostrare che esistono due basi ordinate $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ di V tali che

$$B(e_i, f_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \le i = j \le r, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \tag{0.2}$$

dove r è il rango di B.

Soluzione:

Sia $\mathcal{C}$ una base ordinata qualsiasi di V e si consideri la matrice $M_{\mathcal{C}}(B) \in M_n(F)$ associata a B rispetto alla base $\mathcal{C}$. Per definizione di $M_{\mathcal{C}}(B)$ si ha che

$$B(x,y) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot M_{\mathcal{C}}(B) \cdot [y]_{\mathcal{C}} \quad \text{per ogni } x, y \in V. \tag{0.3}$$

Per il teorema di classificazione delle matrici a meno di equivalenza (studiato a GE110), esistono due matrici invertibili $P, Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ tali che

$$M_{\mathcal{C}}(B) = P \cdot \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q, \tag{0.4}$$

dove r è il rango di $M_{\mathcal{C}}(B)$, ovverosia il rango di B. Per il Lemma sulle matrici invertibili come matrici di cambiamento di base, esistono (uniche) due basi ordinate $\mathcal{E} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\mathcal{F} := \{f_1, \ldots, f_n\}$ di V tali che

$$P = M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}^t \quad \text{e} \quad Q = M_{\mathcal{F},\mathcal{C}}. \tag{0.5}$$

Usando le formule di cambiamento di base $[x]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E},\mathcal{C}} \cdot [x]_{\mathcal{C}}$ e $[y]_{\mathcal{F}} = M_{\mathcal{F},\mathcal{C}} \cdot [y]_{\mathcal{C}}$, e le formule (0.3), (0.4) e (0.5), otteniamo che

$$B(x,y) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot M_{\mathcal{C}}(B) \cdot [y]_{\mathcal{C}} = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot P \cdot \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q \cdot [y]_{\mathcal{C}} = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}^t \cdot \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{C}} \cdot [y]_{\mathcal{C}} =$$

$$= [x]_{\mathcal{E}}^t \cdot \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot [y]_{\mathcal{F}}. \tag{0.6}$$

È facile verificare che la formula (0.6) implica (ed è infatti equivalente) la formula (0.2).