SOLUZIONI DELLA SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE210 (15 GENNAIO 2021)

ESERCIZIO 1 (9 punti)
Sia T l'operatore su $\mathbb{C}^2$ definito da

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1+i)x + (1-i)y \\ (1-i)x + (1+i)y \end{pmatrix}.$$

(A) Dire se T è normale e, in caso affermativo, si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $M_{\mathcal{B}}(T)$ è diagonale (e si scriva $M_{\mathcal{B}}(T)$).
(B) Dire se T è unitario, Hermitiano, anti-Hermitiano, semipositivo, positivo.
(C) Trovare una decomposizione polare destra di T.

[Attenzione: c'era una dimenticanza nel testo (poi chiarita a voce durante l'esame). Il prodotto scalare che si sta considerando su $\mathbb{C}^2$ è quello standard.]

Soluzione:

(A) La matrice di T rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{C}^2$ è uguale a

$$M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Siccome $\mathcal{E}$ è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{C}^2$, allora la matrice dell'aggiunta T^a di T è uguale a

$$M_{\mathcal{E}}(T^a) = M_{\mathcal{E}}(T)^* = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}.$$

L'operatore T è normale visto che

$$M_{\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E}}(T^a) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}(T^a) \cdot M_{\mathcal{E}}(T).$$

Siccome T è normale, dal teorema spettrale sui complessi sappiamo che T è ortonormalmente diagonalizzabile. Per calcolare una base ortonormale diagonalizzante, calcoliamo gli autospazi di T. Il polinomio caratteristico di T è uguale a

$$\chi_T(X) = \det \begin{pmatrix} X-1-i & -1+i \\ -1+i & X-1-i \end{pmatrix} = X^2 - 2(1+i)X + 4i.$$

Gli autovalori di T sono le radici di χ_T e dunque sono uguali a

$$\lambda_{1,2} = 1 + i \pm \sqrt{-2i} = 1 + i \pm (1-i) = 2 \text{ e } 2i.$$

Gli autospazi relativi ai due autovalori sono (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_2(T) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$\mathcal{E}_{2i}(T) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Dunque una base ortonormale diagonalizzante per T è uguale a

$$\mathcal{B} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

la matrice di T rispetto a tale base è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

(B) Siccome gli autovalori di T non sono né tutti reali, né tutti immaginari puri, né tutti di norma uno, allora T non é, rispettivamente, Hermitiana (e dunque neanche positiva o semiapositiva), né anti-Hermitiana, né unitaria.

(C) Siccome T è invertibile, la decomposizione polare destra

$$T = Q \cdot P \text{ con } Q \text{ unitaria e } P \text{ semipositiva}$$

è unica e vale che $P = \sqrt{T^a \cdot T} > 0$ e $Q = T \cdot P^{-1}$. Le matrici di Q e P rispetto alla base ortonormale diagonalizzante $\mathcal{B}$ sono uguali a

$$M_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Se invece si fosse preferito lavorare con la base canonica, allora le matrici degli operatori Q e P sono

$$M_{\mathcal{E}}(Q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E}}(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.]$$

ESERCIZIO 2 (7 punti)
Sia S l'operatore su $\mathbb{R}^3$ definito da

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Dire se S è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si trovi una base ortonormale $\mathcal{C}$ rispetto alla quale $M_{\mathcal{C}}(S)$ è diagonale (e si scriva $M_{\mathcal{C}}(S)$).

(B) Dire se S è semipositivo e, in caso affermativo, si calcoli $\sqrt{S}$.

[Attenzione: c'era una dimenticanza nel testo (poi chiarita a voce durante l'esame). Il prodotto scalare che si sta considerando su $\mathbb{C}^2$ è quello standard.]

Soluzione:

(A) La matrice di S rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ è uguale a

$$M_{\mathcal{E}}(S) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\mathcal{E}$ è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$, l'operatore S è simmetrico perché la matrice $M_{\mathcal{E}}(S)$ è simmetrica. Siccome S è simmetrico, dal teorema spettrale sui reali sappiamo che T è ortonormalmente diagonalizzabile. Per calcolare una base ortonormale diagonalizzante, calcoliamo gli autospazi di S. Il polinomio caratteristico di S è uguale a

$$\chi_S(X) = \det \begin{pmatrix} X-2 & -2 & 0 \\ -2 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix} = (X-1)X(X-4).$$

Dunque S possiede i tre autovalori 1, 0 e 4. Gli autospazi relativi ai tre autovalori sono (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_0(S) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathcal{E}_4(S) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathcal{E}_1(S) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Dunque una base ortonormale diagonalizzante per S è uguale a

$$\mathcal{B} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

e la matrice di S rispetto a tale base è

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(B) S è semipositivo perché è simmetrico e gli autovalori sono (reali e) non negativi. La radice quadrata $\sqrt{S}$ di S è l'unico operatore su $\mathbb{R}^3$ tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\sqrt{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Se invece si fosse preferito lavorare con la base canonica, allora la matrice di $\sqrt{S}$ sarebbe stata

$$M_{\mathcal{E}}(\sqrt{S}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}(\sqrt{S}) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}].$$

ESERCIZIO 3 (8 punti)

(A) Trovare una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che manda i quattro punti

$$P_1 = [1,0,0], P_2 = [0,1,0], P_3 = [0,0,1], P_4 = [1,1,1]$$

nei quattro punti

$$R_1 = [1,1,-1], R_2 = [1,1,0], R_3 = [1,2,1], R_4 = [3,4,0].$$

(B) Si dica se esiste un'affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ che manda i quattro punti

$$Q_1 = (0,0), Q_2 = (1,0), Q_3 = (0,1), Q_4 = (1,1)$$

nei quattro punti

$$S_1 = (1, -1), S_2 = (1, 0), S_3 = (2, 1), S_4 = \left(\frac{4}{3}, 0\right),$$

e in caso affermativo si scriva una tale affinità.

Soluzione:

(A) Si consideri una proiettività $f_{[M]} \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})$ con $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Si denotino le colonne di M con $M = (M^1|M^2|M^3)$. Le condizioni richieste su $f_{[M]}$ sono le seguenti:

$$f_{[M]}(P_1) = R_1 \Leftrightarrow M^1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ per qualche } \lambda_1 \in \mathbb{R}^*,$$

$$f_{[M]}(P_2) = R_2 \Leftrightarrow M^2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per qualche } \lambda_2 \in \mathbb{R}^*,$$

$$f_{[M]}(P_3) = R_3 \Leftrightarrow M^3 = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ per qualche } \lambda_3 \in \mathbb{R}^*,$$

$$f_{[M]}(P_4) = R_4 \Leftrightarrow M^1 + M^2 + M^3 = \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per qualche } \lambda_4 \in \mathbb{R}^*,$$

Dunque le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^*$ devono soddisfare il sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per esempio, possiamo prendere $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, e con tale scelta la matrice M sarà uguale a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(B) Presenterò due possibili soluzioni.

Prima Soluzione:

Consideriamo un'affinità $f_{A,c}$ son $A = (A^1|A^2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (dove A^1 e A^2 sono le colonne di A) e $c \in \mathbb{R}^2$. Le condizioni richieste su $f_{A,c}$ sono le seguenti

$$f_{[M]}(Q_1) = S_1 \Leftrightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$f_{[M]}(Q_2) = S_2 \Leftrightarrow A^1 + c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{[M]}(Q_3) = S_3 \Leftrightarrow A^2 + c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_{[M]}(Q_4) = S_4 \Leftrightarrow A^1 + A^2 + c = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le prime tre condizioni implicano che

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e sostituendo nell'ultima equazione si ottiene l'assurdo

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque non esiste nessuna affinità con le proprietà richieste.

Seconda Soluzione:

Supponiamo che esista un'affinità $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})$ con le proprietà richieste e sia $\phi_f \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ l'automorfismo lineare associato ad f. Allora avremo che

$$\phi_f(\overrightarrow{Q_1Q_2}) = \overrightarrow{S_1S_2} \Leftrightarrow \phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \phi_f(Q_2 - Q_1) = S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\phi_f(\overrightarrow{Q_1Q_3}) = \overrightarrow{S_1S_3} \Leftrightarrow \phi_f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \phi_f(Q_3 - Q_1) = S_3 - S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\phi_f(\overrightarrow{Q_1Q_4}) = \overrightarrow{S_1S_4} \Leftrightarrow \phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \phi_f(Q_4 - Q_1) = S_4 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

However, the above conditions contradict the linearity of ϕ_f since

$$\phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \phi_f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4 (8 punti)

Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano affine Π di equazioni cartesiane

$$\Pi : \{X_1 + X_2 = 1,$$

e la retta affine

$$r := \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ -t+1 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(A) Si scriva Π in forma parametrica e r in forma cartesiana.
(B) Si dica se Π e r sono parallele e si stabilisca se Π e r sono incidenti o sghembe.
(C) Si determinino equazioni cartesiane per le chiusure proiettive $\overline{\Pi}$ e $\overline{r}$ di, rispettivamente, Π e r in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.
(D) Si calcolino i punti all'infinito di Π e r, cioè i sottospazi proiettivi $\overline{\Pi} \cap H_0$ e $\overline{r} \cap H_0$ (dove H_0 è l'iperpiano all'infinito).
(E) Si determini l'intersezione $\overline{\Pi} \cap \overline{r}$ e si calcoli $\dim(\overline{\Pi} + \overline{r})$.

Soluzione:

(A) Una forma parametrica per il piano Π è

$$\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1-u \\ u \\ s \end{pmatrix} : s, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una forma cartesiana per la retta r è:

$$r : \begin{cases} X_1 + X_2 = 2, \\ X_2 + X_3 = 1. \end{cases}$$

(B) Π e r sono parallele perché

$$\mathrm{giac}(r) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathrm{giac}(\Pi) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Inoltre Π e r sono sghembe perché r é contenuto nel piano di equazioni cartesiane $X_1 + X_2 = 2$ che é chiaramente disgiunto da Π.

(C) Delle equazioni cartesiane per $\overline{\Pi}$ e $\overline{r}$ si ottengono omogeneizzando le equazioni cartesiane per Π e r e dunque sono uguali a

$$\overline{\Pi} : \{X_1 + X_2 = X_0, \quad \text{e} \quad \overline{r} : \begin{cases} X_1 + X_2 = 2X_0, \\ X_2 + X_3 = X_0. \end{cases}$$

(D) I punti all'infinito di Π e r hanno equazioni cartesiane

$$\overline{\Pi} \cap H_0 : \{X_1 + X_2 = 0, \quad \text{e} \quad \overline{r} \cap H_0 : \begin{cases} X_1 + X_2 = 0, \\ X_2 + X_3 = 0. \end{cases}$$

Dunque $\overline{\Pi} \cap H_0$ è una retta in $H_0 \cong \mathbb{P}^1$ mentre $\overline{r} \cap H_0$ è il punto $P = [0, 1, -1, 1]$.

(E) L'intersezione $\overline{r} \cap \overline{\Pi}$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = X_0, \\ X_1 + X_2 = 2X_0, \\ X_2 + X_3 = X_0, \end{cases}$$

e dunque consiste del punto $P = [0, 1, -1, 1]$. La somma $\overline{r} + \overline{\Pi}$ ha dimensione data dalla formula di Grassmann proiettiva e cioé

$$\dim(\overline{r} + \overline{\Pi}) = \dim(r) + \dim(\Pi) - \dim(\overline{r} \cap \overline{\Pi}) = 1 + 2 - 0 = 3,$$

il che implica che $\overline{r} + \overline{\Pi} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Sia $(V, \langle, -, -\rangle)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale munito di un prodotto scalare.
Si consideri la seguente applicazione lineare

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \operatorname{End}(V) &\longrightarrow \operatorname{Bil}(V), \\ T \mapsto \mathcal{L}_T : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto \mathcal{L}_T(x, y) := \langle T(x), y\rangle, \end{aligned}$$

(A) Dimostrare che $\mathcal{L}$ è un isomorfismo lineari di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.
[Suggerimento: basta (perché?) mostrare che $\mathcal{L}$ è iniettivo.]
(B) Dimostrare che T è simmetrico se e solo se $\mathcal{L}_T$ è simmetrico.
(C) Dimostrare che T è anti-simmetrico se e solo se $\mathcal{L}_T$ è anti-simmetrico.
(D) Dimostrare che T è un operatore positivo se e solo se $\mathcal{L}_T$ è un prodotto scalare.

Soluzione:

(A) L'applicazione lineare $\mathcal{L}$ è iniettiva perché dati $T_1, T_2 \in \operatorname{End}(V)$ si ha che

$$\mathcal{L}_{T_1} = \mathcal{L}_{T_2} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \langle T_1(x), y\rangle = \langle T_2(x), y\rangle \\ \text{per ogni } x, y \in V \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} T_1(x) = T_2(x) \\ \text{per ogni } x \in V \end{array} \Leftrightarrow T_1 = T_2,$$

dove nella seconda implicazione abbiamo usato che $\langle -, -\rangle$ è non degenere. Dunque $\mathcal{L}$ è un isomorfismo lineare perché è iniettiva e

$$\dim \operatorname{End}(V) = \dim \operatorname{End}(V) = (\dim V)^2.$$

(B) $\mathcal{L}_T$ è simmetrico se e solo se per ogni $x, y \in V$ vale che

$$\langle T(x), y\rangle = \mathcal{L}_T(x, y) = \mathcal{L}_T(y, x) = \langle T(y), x\rangle = \langle x, T(y)\rangle, \tag{0.1}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $\langle -, - \rangle$ è simmetrico. L'uguaglianza (0.1) per ogni $x, y \in V$ implica che $T^a = T$ e dunque che T è simmetrico.

(C) $\mathcal{L}_T$ è antisimmetrico se e solo se per ogni $x, y \in V$ vale che

$$\langle T(x), y \rangle = \mathcal{L}_T(x, y) = -\mathcal{L}_T(y, x) = \langle T(y), x \rangle = \langle x, T(y) \rangle, \tag{0.2}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $\langle -, - \rangle$ è simmetrico. L'uguaglianza (0.2) per ogni $x, y \in V$ implica che $T^a = -T$ e dunque che T è antisimmetrico.

(D) $\mathcal{L}_T$ è un prodotto scalare se e solo se $\mathcal{L}_T$ è simmetrica (il che è equivalente al fatto che T è simmetrico per il punto (B)) e vale che

$$\langle T(x), x \rangle \geq 0 \text{ per ogni } x \in V \quad \text{e} \quad \langle T(x), x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0. \tag{0.3}$$

La condizione (0.3), insieme alla simmetria di T, è equivalente al fatto che T è definito positivo.