ESERCIZI SU FORME BILINEARI

ESERCIZIO 1

Sia (V_1, B_1) e (V_2, B_1) due spazi vettoriali metrici su un campo F di caratteristica diversa da 2. Supponiamo che (V_1, B_1) sia simmetrico.

Mostrare che un'applicazione lineare $\tau : (V_1, B_1) \to (V_2, B_2)$ é un isometria se e solo se

$$B_2(\tau(x), \tau(x)) = B_1(x, x) \text{ per ogni } x \in V.$$

ESERCIZIO 2

Sia (V, B) uno spazio vettoriale metrico tale che $\mathrm{rad}^L(B) = \mathrm{rad}^R(B)$ e poniamo $\mathrm{rad}(B) := \mathrm{rad}^L(B) = \mathrm{rad}^R(B)$. Definiamo

$$\begin{aligned} \overline{B} : V/\,\mathrm{rad}(B) \times V/\,\mathrm{rad}(B) &\longrightarrow F, \\ (x + \mathrm{rad}(B), y + \mathrm{rad}(B)) &\mapsto B(x, y). \end{aligned}$$

(i) Mostrare che $\overline{B}$ e' ben definita e bilineare.
(ii) Mostrare che $\overline{B}$ è non degenere.
(iii) Sia $S \leq V$ un complementare di $\mathrm{rad}(B)$. Mostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \tau : (S, B_{|S}) &\longrightarrow (V/\,\mathrm{rad}(B), \overline{B}) \\ x &\mapsto x + \mathrm{rad}(B), \end{aligned}$$

è un'isometria.

ESERCIZIO 3

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $B \in \mathrm{Bil}(V)$.

Mostrare che esistono due basi ordinate $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ tali che

$$B(e_i, f_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq i = j \leq r, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $r = \mathrm{rk}(B)$.

ESERCIZIO 4

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $B \in \mathrm{Bil}(V)$ simmetrica o antisimmetrica. Dimostrare che per un sottospazio $W \leq V$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) $B_{|W}$ è non-degenere.
(ii) $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
(iii) $V = W \oplus^{\mathrm{int}} W^{\perp}$.

ESERCIZIO 5

Siano (V_1, B_1) e (V_2, B_2) due F-spazi vettoriali metrici. Sulla somma diretta (esterna) $V_1 \oplus V_2$, si definisca

$$\begin{aligned} B_1 \oplus B_2 : (V_1 \oplus V_2) \times (V_1 \oplus V_2) &\to F, \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto B_1(x_1, y_1) + B_2(x_2 + y_2). \end{aligned}$$

Mostrare che:

(i) $B_1 \oplus B_2$ è una forma bilineare (detta *forma bilineare somma diretta* di B_1 e B_2).

(ii) Se B_1 e B_2 sono entrambe simmetriche, risp. antisimmetriche, risp. alterne allora anche $B_1 \oplus B_2$ è simmetrica, risp. antisimmetrica, risp. alterna.
(iii) $B_1 \oplus B_2$ è non-degenere se e solo se B_1 e B_2 sono non-degeneri.
(iv) Identificando V_1 e V_2 some sottospazi di $V_1 \oplus V_2$ nel modo usuale, abbiamo che

$$V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus^{\perp} V_2,$$

rispetto alla forma $B_1 \oplus B_2$.

ESERCIZIO 6

Sia V un F-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $B \in \mathrm{Bil}(V)$ una forma bilineare non-degenere.

(i) Dimostrare che esiste un isomofismo di F-spazi vettoriali

$$\Phi_B : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V),$$
$$T \mapsto B_T := B(-, T(-)).$$

(ii) Mostrare che B_T è non-degenere se e solo se T è invertibile.

ESERCIZIO 7

Un *piano iperbolico* simplettico (risp. ortogonale) è uno spazio vettoriale metrico (V, B) alterno (risp. simmetrico) di dimensione 2 che ammette una base $\{u.v\}$ di V tale che

$$B(u, v) = B(v, u) = 0 \quad \text{e } B(u, v) = 1.$$

(Da notare che $B(v, u) = \pm 1$ a seconda che B sia simmetrica o alterna).

(i) Dimostrare che uno spazio vettoriale alterno (V, B) non-degenere di dimensione due è un piano iperbolico simplettico.
(ii) Dimostrare che uno spazio vettoriale simmetrico (V, B) non-degenere di dimensione due su un campo di caratteristica diversa da 2 è un piano iperbolico ortogonale se e solo se V ammette un vettore w tale che $B(w, w) = 0$.
(iii) Si consideri la forma bilineare B su $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ definita da

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2.$$

Dimostrare che B è simmetrica e non-degenere, che il vettore $w = (1, 0)$ soddisfa $B(w, w) = 0$ ma che $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, B)$ non è un piano iperbolico ortogonale.

ESERCIZIO 8

Sia V un F-spazio vettoriale di dimensione finita. Consideriamo

$$B : (V \oplus V^{\vee}) \times (V \oplus V^{\vee}) \to F,$$
$$((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) \mapsto \phi_2(v_1) - \phi_1(v_2).$$

(i) Dimostrare che B è una forma bilineare alterna.
(ii) Dimostrare che B è non-degenere.
(iii) Sia $\mathcal{E}$ una base ordinata di V e sia $\mathcal{E}^{\vee}$ la sua base duale. Scrivere $M_{\mathcal{E} \coprod \mathcal{E}^{\vee}}(B)$.

ESERCIZIO 9

Sia K un campo e consideriamo il K-spazio vettoriale $V = M_n(K)$ (per $n \geq 1$). Si consideri l'applicazione

$$\mathrm{Tr} : M_n(F) \times M_n(F) \longrightarrow K$$
$$(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A, B) := \mathrm{tr}(A \cdot B).$$

(i) Dimostrare che Tr è un'applicazione bilineare simmetrica.
(ii) Dimostrare che: Tr è non-degenere.
(iii) Scrivere la matrice di Tr rispetto alla base canonica di $M_n(F)$.

ESERCIZIO 10

Sia K un campo e consideriamo il K-spazio vettoriale $V = M_{2,2}(K)$. Per ogni $M \in M_{2,2}(K)$ si consideri l'applicazione bilineare

$$F_M : V \times V \longrightarrow K$$
$$(A, B) \mapsto F_M(A, B) := \mathrm{tr}(A^t \cdot M \cdot B).$$

(i) Dimostrare che l'applicazione

$$F : V \longrightarrow \mathrm{Bil}(V)$$
$$M \mapsto F_M$$

è lineare e iniettiva.

(ii) Stabilire per quali $M \in V$ si ha che F_M è simmetrica o antisimmetrica o alterna. Assumendo che $\mathrm{char}(K) \neq 2$, scrivere F_M come una somma di un'applicazione bilineare simmetrica e una antisimmetrica.
(iii) Calcolare $\mathrm{rad}^L(F_M)$ e $\mathrm{rad}^R(F_M)$.
(iv) Calcolare il rango di F_M in funzione del rango di M. In particolare, dire per quali $M \in V$ si ha che F_M è non-degenere.

ESERCIZIO 11

Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Si consideri la forma biilineare $B \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$M_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e l'operatore $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Mostrare che B è non-degenere, né simmetrica né antisimmetrica.
(ii) Mostrare che $(T^{\mathrm{adj}})^{\mathrm{adj}} \neq T$.