ESERCIZI SU FORME BILINEARI ALTERNE

ESERCIZIO 1

Sia (V, B) uno spazio simplettico non-degenere. Dimostrare che ogni elemento del gruppo simplettico $\mathrm{Sp}(V, B)$ ha determinante uguale a 1.

[Suggerimento: si usi che $\mathrm{Sp}(V, B)$ è generato da trasvezioni simplettiche.]

ESERCIZIO 2

Sia $V = K^2$ e consideriamo la forma simplettica canonica (o standard)

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

(i) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{Sp}(V, B)$ é della forma

$$\eta_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{per una matrice } A \in M_{2,2}(K) \text{ tale che } \det A = 1.$$

(ii) Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ scrivere η_A come prodotto di trasvezione smplettiche.

(iii) Scrivere ogni elemento η_A come prodotto di trasvezioni simplettiche.

ESERCIZIO 3

Sia (V, B) un F-spazio vettoriale simplettico di dimensione $2n$ e sia $\mathcal{E}$ una base simplettica di V, ordinata in modo tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$. Sia $T \in \mathrm{GL}(V)$ e scriviamo $M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con $A, B, C, D \in M_n(F)$.

Dimostrare che:

(i) l'aggiunto di $T : (V, B) \to (V, B)$ ha matrice $M_{\mathcal{E}}(T^{\mathrm{adj}}) = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}$.

(ii) T è un'auto-isometria di (V, B) se e solo se valgono le seguente condizioni:

$$\begin{cases} -C^t \cdot A + A^t \cdot C = 0_n, \\ -D^t \cdot B + B^t \cdot D = 0_n, \\ -C^t \cdot B + A^t \cdot D = I_n, \\ -D^t \cdot A + B^t \cdot C = -I_n. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Sia (V, B) un F-spazio vettoriale simplettico di dimensione $2n$ e sia $\mathcal{E} = \{u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\}$ una base simplettica di V, ordinata in modo tale che $M_{\mathcal{E}}(B) = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Per ogni scalare $a \in F$ e per ogni $1 \leq i \leq n$, mostrare che le trasvezioni simplettiche $\tau_{u_i,a}$

e $\tau_{v_i,a}$ hanno matrici associate uguali a

$$M_{\mathcal{E}}(\tau_{u_i,a}) = \operatorname{diag}\left(\underbrace{I_2,\ldots,}_{i-1}\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ldots,I_2\right),$$

$$M_{\mathcal{E}}(\tau_{v_i,a}) = \operatorname{diag}\left(\underbrace{I_2,\ldots,}_{i-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix},\ldots,I_2\right).$$

ESERCIZIO 5

Sia (V,B) un F-spazio vettoriale simplettico. Siano $v,w\in V\setminus\{0\}$ e $a,b\in F$. Dimostrare che:

$$\tau_{v,a}=\tau_{w,b}\Leftrightarrow\begin{cases} a=b=0 \quad \text{oppure}\\ w=\lambda v \quad \text{e} \quad a=\lambda^2 b \quad \text{per un certo } \lambda\in F\setminus\{0\}.\end{cases}$$

ESERCIZIO 6

Sia consideri le seguenti forme bilineare alterne su $V=\mathbb{Q}^n$ date in termini della base canonica $\{e_1,\ldots,e_n\}$:

(A) $B\left(\sum_{i=1}^2 x_ie_i,\sum_{j=1}^2 y_je_j\right)=x_1y_2-x_2y_1$.

(B) $B\left(\sum_{i=1}^3 x_ie_i,\sum_{j=1}^3 y_je_j\right)=x_1y_2+2x_1y_3-x_2y_1-x_2y_3-2x_3y_1+x_3y_2$.

(C) $B\left(\sum_{i=1}^4 x_ie_i,\sum_{j=1}^4 y_je_j\right)=x_1y_2-x_1y_3-x_1y_4-x_2y_1-x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2-x_3y_4+x_4y_1+x_4y_3$.

(D) $B\left(\sum_{i=1}^4 x_ie_i,\sum_{j=1}^4 y_je_j\right)=-x_3y_1+x_1y_3-x_3y_2+x_2y_3-x_4y_1+x_1y_4-2x_4y_2+2x_2y_4$.

Per ciascuna delle forme bilineari alterne precedenti:

(i) Trovare una base simplettica di (V,B).
(ii) Calcolare il rango di B e dire quando B è non degenere.

ESERCIZIO 7

Sia $V=K^2$ (con K campo arbitrario) con base canonica $\mathcal{E}:=\{e_1,e_2\}$. Si consideri la forma bilineare

$$B\left(\sum_{i=1}^2 x_ie_i,\sum_{j=1}^2 y_je_j\right)=2x_1y_2-2x_2y_1,$$

e l'operatore $T\in\operatorname{End}(K^2)$ definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^2 x_ie_i\right)=\frac{2x_1-x_2}{2}e_1+2x_1e_2.$$

(i) Dimostrare che B è alterna e non degenere.
(ii) Trovare una base simplettica di (V,B).
(iii) Dimostrare che T è un'isometria di (V,B).
(iv) Scrivere T come prodotto di trasvezioni simplettiche.

ESERCIZIO 8

Sia $V = K^4$ (con K campo arbitrario) con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Consideriamo la forma bilineare

$$B\left(\sum_{i=1}^{4} x_i e_i, \sum_{j=1}^{4} y_j e_j\right) = x_1y_2 - x_1y_3 + x_1y_4 - x_2y_1 + x_3y_1 + x_3y_4 - x_4y_1 - x_4y_3$$

e l'operatore $T \in \mathrm{End}(V)$ definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{4} x_i e_i\right) = (2x_1 - x_2 + x_3 - x_4)e_1 + (x_1 + 2x_3 - 3x_4)e_2 + (3x_3 - 4x_4)e_3 + (x_3 - x_4)e_4.$$

(i) Dimostrare che B è alterna e non degenere.
(ii) Scrivere (V, B) come somma diretta ortogonale di due piani simplettici iperbolici.
(iii) Dimostrare che T è un isometria di (V, B).
(iv) Scrivere T come prodotto di trasvezioni simplettiche di (V, B).