ESERCIZI SU FORME BILINEARI SIMMETRICHE E FORME QUADRATICHE

ESERCIZIO 1

Sia $V = \mathbb{C}^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche

(A) $B_1\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 6x_1y_1 + x_1y_2 + 5x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 5x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$.

(B) $B_2\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 5x_1y_1 + x_1y_2 + 4x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 4x_3y_1 + 2x_3y_2 + 5x_3y_3$.

(C) $B_3\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.

Per ciascuna delle forme bilineari precedenti:

(i) Trovare il radicale.
(ii) Determinare il rango.
(iii) Trovare una base ortogonale rispetto alla quale la matrice associata è in forma canonica.

ESERCIZIO 2

Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche

(A) $B_1\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 6x_1y_1 + x_1y_2 + 5x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 5x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$.

(B) $B_2\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.

(C) $B_3\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = -6x_1y_1 - x_1y_2 - 5x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - 5x_3y_1 - 2x_3y_2 - 6x_3y_3$.

(D) $B_4\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_2 - 4x_3y_3$.

(E) $B_5\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 5x_1y_1 + x_1y_2 + 4x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 4x_3y_1 + 2x_3y_2 + 5x_3y_3$.

(F) $B_6\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 + 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - 3x_3y_3$.

Per ciascuna delle forme bilineari precedenti:

(i) Trovare il radicale.
(ii) Determinare il rango.
(iii) Trovare una base ortogonale rispetto alla quale la matrice associata è in forma canonica.
(iv) Determinare la segnatura.

ESERCIZIO 3

Sia $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche

(A) $B_1\left(\sum_{i=1}^3 x_ie_i, \sum_{j=1}^3 y_je_j\right) = x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2$.

(B) $B_2\left(\sum_{i=1}^3 x_ie_i, \sum_{j=1}^3 y_je_j\right) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + x_3y_3$.

Per ciascuna delle due forme bilineari precedenti:

(i) Dimostrare che sono non-degeneri.
(ii) Calcolare il discriminante.
(iii) Trovare una base ortogonale rispetto alla quale la matrice associata è in forma canonica.
(iv) Dire se le due forme bilineari sono equivalenti oppure no.

ESERCIZIO 4

Sia $V = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche

(A) $B_1\left(\sum_{i=1}^3 x_ie_i, \sum_{j=1}^3 y_je_j\right) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + x_3y_3$.

(B) $B_2\left(\sum_{i=1}^3 x_ie_i, \sum_{j=1}^3 y_je_j\right) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$.

(C) $B_3\left(\sum_{i=1}^3 x_ie_i, \sum_{j=1}^3 y_je_j\right) = 2x_1y_1+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_2+2x_2y_3+x_3y_1+2x_3y_2+2x_3y_3$.

(D) $B_4\left(\sum_{i=1}^3 x_ie_i, \sum_{j=1}^3 y_je_j\right) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3$.

Per ciascuna delle forme bilineari precedenti:

(i) Dimostrare che sono non-degeneri.
(ii) Calcolare il discriminante.
(iii) Trovare una base ortogonale rispetto alla quale la matrice associata è in forma canonica.
(iv) Dire quali delle forme bilineari (A), (B), (C), (D) sono equivalenti tra di loro.

ESERCIZIO 5

Sia $V = \mathbb{Q}^2$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ e si consideri la seguente forma bilineare simmetrica

$$B\left(\sum_{i=1}^2 x_ie_i, \sum_{j=1}^2 y_je_j\right) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Si considerino i seguenti operatori su V

(A) $\Phi_1 = \mathrm{Id}_V$.

(B) $\Phi_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$.

(C) $\Phi_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 3x_2 \end{pmatrix}$.

(D) $\Phi_4 = -\mathrm{Id}_V$.

Mostrare che:

(i) (V, B) è uno spazio vettoriale ortogonale.
(ii) $\Phi_i \in O(V, B)$.
(iii) Dire se ciascun Φ_i è una rotazione (cioè se $\Phi_i \in O^+(V, B)$) o una riflessione (cioè se $\Phi_i \in O^-(V, B)$).

(iv) Scrivere ciascun Φ_i come prodotto di al più 4 simmetrie.

ESERCIZIO 6

Sia $V = \mathbb{Q}^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si consideri la seguente forma bilineare simmetrica

$$B\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = 6x_1y_1+x_1y_2+5x_1y_3+x_2y_1+x_2y_2+2x_2y_3+5x_3y_1+2x_3y_2+6x_3y_3.$$

Si considerino i seguenti operatori su V

(A) $\Phi_1 = \mathrm{Id}_V$.

(B) $\Phi_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_3 \\ 6x_1 + x_2 + 6x_3 \\ -4x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$.

(C) $\Phi_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_3 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$.

(D) $\Phi_4 = -\mathrm{Id}_V$.

Mostrare che:

(i) (V, B) è uno spazio vettoriale ortogonale.

(ii) $\Phi_i \in O(V, B)$.

(iii) Dire se ciascun Φ_i è una rotazione (cioè se $\Phi_i \in O^+(V, B)$) o una riflessione (cioè se $\Phi_i \in O^-(V, B)$).

(iv) Scrivere ciascun Φ_i come prodotto di al più 6 simmetrie.

ESERCIZIO 7

Sia (V, B) uno spazio ortogonale su un campo K tale che $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Siano u, v due vettori anisotropi. Dimostrare che $\sigma_u = \sigma_v$ se e solo se u e v sono proporzionali.

ESERCIZIO 8

Sia (V, B) uno spazio ortogonale su un campo K di caratteristica diversa da 2. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) (V, B) è un *piano ortogonale iperbolico*, cioè esiste una base $\{u, v\}$ tale che $B(u, u) = B(v, v) = 0$ e $B(u, v) = 1$.

(ii) esiste un vettore isotropico non nullo;

(iii) il discriminante $\mathrm{disc}(B)$ di B è $[-1] \in K^*/(K^*)^2$.

ESERCIZIO 9

Sia $V = K^2$ (con K campo di caratteristica diversa da 2) e si consideri la forma bilineare simmetrica

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 - y_1y_2.$$

Trovare una *base iperbolica* di (V, B), cioè una base $\{u, v\}$ tale che $B(u, u) = B(v, v) = 0$ e $B(u, v) = 1$.

ESERCIZIO 10

Sia $V = K^2$ (con K campo di caratteristica diversa da 2) e si consideri la forma bilineare simmetrica

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

(i) Se $K = \mathbb{C}$ allora trovare una base iperbolica di (V, B).

(ii) Se $K = \mathbb{R}$ allora dimostrare che (V, B) non è un piano iperbolico.

ESERCIZIO 11

Sia $V = K^2$ (con K campo di caratteristica diversa da 2) e consideriamo la forma bilineare simmetrica non-degenere

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_1.$$

(i) Dimostrare che l'insieme dei vettori isotropi é

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \; : \; \lambda \in K\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \; : \; \mu \in K\right\}.$$

(ii) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{O}^+(V, B)$ è della forma

$$\psi_a\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax \\ a^{-1}y \end{pmatrix} \quad \text{con } a \in K^*,$$

e che ogni elemento di $\mathrm{O}^-(V, B)$ è della forma

$$\widetilde{\psi}_b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} by \\ b^{-1}x \end{pmatrix} \quad \text{con } b \in K^*,$$

(iii) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{O}^-(V, B)$ è una simmetria.

(iv) Scrivere ψ_2 come prodotto di simmetrie.

(v) Scrivere ogni elemento ψ_a come prodotto di simmetrie.

ESERCIZIO 12

Sia $V = K^2$ (con K campo di caretteristica diversa da 2) e consideriamo la forma bilineare simmetrica standard

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

(i) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{O}(V, B)$ è della forma

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{per una matrice } A \in M_{2,2}(K) \text{ tale che } A \cdot A^t = I_2.$$

(ii) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{O}^-(V, B)$ è una simmetria.

(iii) Scrivere ogni elemento ϕ_A come prodotto di simmetrie.

ESERCIZIO 13

Sia (V, B) uno spazio vettoriale ortogonale su un campo K di caratteristica diversa da 2. Sia σ un'isometria di (V, B) tale che $\sigma^2 = \mathrm{id}_V$. Dimostrare che esiste un'unica decomposizione ortogonale $V = U_1 \oplus^\perp U_2$ tale che $\sigma_{|U_1} = -\mathrm{id}_{U_1}$ e $\sigma_{|U_2} = \mathrm{id}_{U_2}$.

ESERCIZIO 14

Sia K un campo e consideriamo la forma simmetrica $B \in \mathrm{Bil}^s(K^2)$ definita da

$$B(u, v) = u^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v.$$

Dimostrare che:

(i) Se $\mathrm{car}(K) \neq 2$ allora non esiste nessuna base ortogonale di (K^2, B) che contiene il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Se $\mathrm{car}(K) = 2$ dimostrare che non esiste nessuna base ortogonale di (K^2, B).

ESERCIZIO 15

Sia K un campo e consideriamo il K-spazio vettoriale $V = M_2(K)$. Si consideri l'applicazione bilineare simmetrica non-degenere (come nell'Esercizio 9 del Foglio 1 di Esercizi)

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} : M_2(F) \times M_2(F) &\longrightarrow K \\ (A, B) &\mapsto \mathrm{Tr}(A, B) := \mathrm{tr}(A \cdot B). \end{aligned}$$

(i) Supponiamo che $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Trovare una base ortogonale di $(M_2(K), \mathrm{Tr})$.

(ii) Se $\mathrm{car}(K) = 2$, esiste una base ortogonale di $(M_2(K), \mathrm{Tr})$?

ESERCIZIO 16

Sia K un campo e consideriamo il K-spazio vettoriale $V = M_2(K)$. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \det : M_2(F) &\longrightarrow K \\ A &\mapsto \det(A). \end{aligned}$$

(i) Mostrare che det è una forma quadratica.

(ii) Diagonalizzare la forma bilineare simmetrica associata.

ESERCIZIO 17

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita con $\mathrm{car}(K) \neq 2$ e sia $B \in \mathrm{Bil}^s(V)$. Dimostrare che un vettore isotropo $v \in V$ può essere parte di una base ortogonale se e solo se $v \in \mathrm{rad}(B)$.

ESERCIZIO 18

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita con $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Sia $B \in \mathrm{Bil}^s(V)$ non-degenere e si consideri l'isomorfismo $L_B : V \xrightarrow{\cong} V^\vee$. Si consideri una base $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V e la base duale $\mathcal{E}^\vee = \{e_1^\vee, \dots, e_n^\vee\}$ di $V^\vee$. Dimostrare che

$$L_B(e_i) = e_i^\vee \text{ per ogni } 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{E} \text{ è una base ortogonale tale che} \\ B(e_i, e_i) = 1 \text{ per ogni } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

ESERCIZIO 19

Si considerino le seguenti forme bllineari simmetriche su $\mathbb{Q}^2$:

$$B_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 + y_1y_2,$$

$$B_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2.$$

Dimostrare che:

(i) $\Delta(B_1) = \Delta(B_2)$.

(ii) B_1 e B_2 non sono equivalenti.

(iii) B_1 e B_2 diventano equivalenti quando le consideriamo come forme bilineari simmetriche su $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 20

Sia B una forma bilineare simmetrica non-degenere su $\mathbb{R}^n$ di segnatura (p, q).

(i) Mostrare che p è la dimensione del più grande sottospazio $U \leq V$ tale che $B_{|U}$ ha segnatura $(\dim U, 0)$.

(ii) Mostrare che q è la dimensione del più grande sottospazio $W \leq V$ tale che $B_{|U}$ ha segnatura $(0, \dim W)$.
(iii) Sia $U \leq W$ tale che $B_{|U}$ ha segnatura $(p, 0)$ (che esiste per il punto (i)). Mostrare che $U^{\perp}$ è l'unico sottospazio di V tale che
(a) $B_{|U^{\perp}}$ has segnatura $(0, q)$;
(b) $V = U \oplus^{\perp} U^{\perp}$.

ESERCIZIO 21

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \in \mathbb{N}_{>0}$ su un campo K di caratteristica diversa da 2. Due forme quadratiche $Q_1, Q_2 \in \mathrm{Quad}(V)$ si dicono *equivalenti* se esiste $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ tale che

$$Q_2(x) = Q_1(\phi(x)).$$

(i) Dimostrare che la relazione di equivalenza in $\mathrm{Quad}(V)$ è una relazione di equivalenza.
(ii) Dimostrare che due forme quadratiche $Q_1, Q_2 \in \mathrm{Quad}(V)$ sono equivalenti se e solo se le loro forme bilineari polari associate B_{Q_1} e B_{Q_2} sono equivalenti.
(iii) Dimostrare che se $K = \mathbb{C}$, allora per ogni $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ esiste una base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che

$$Q(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_r^2 \quad \text{con } r = \mathrm{rk}(B).$$

(iv) Dimostrare che se $K = \mathbb{R}$, allora per ogni $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ esiste una base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che

$$Q(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_p^2 - \lambda_{p+1}^2 - \ldots - \lambda_r^2 \quad \text{per un unico } 0 \leq p \leq r = \mathrm{rk}(B).$$

(v) Dimostrare che se $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (con p primo diverso da 2), allora per ogni $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ esiste una base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che

$$Q(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{r-1}^2 + a\lambda_r^2 \quad \text{con } r = \mathrm{rk}(B) \quad \text{e } a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*.$$

ESERCIZIO 22

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita con $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Sia $Q \in \mathrm{Quad}(V)$.
(i) Dimostrare che Q soddisfa la regola (detta del *parallelogramma*):

$$Q(v + w) + Q(v - w) = 2[Q(v) + Q(w)] \quad \text{per ogni } v, w \in V.$$

(ii) Dimostrare che la forma bilineare polare B_Q associata a Q è data da

$$B_Q(v, w) = \frac{Q(v + w) - Q(v - w)}{2}.$$

ESERCIZIO 23

Sia V un K-spazio vettoriale tale che $\dim_K V = 2$ e $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Dimostrare che per una forma quadratica $Q \in \mathrm{Quad}(V)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:
(i) Esiste una base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ di V tale che

$$Q(xe_1 + ye_2) = x^2 - y^2.$$

(ii) $\Delta(B_Q) = [-1] \in K^*/(K^*)^2$.
(iii) Esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $Q(v) = 0$.

ESERCIZIO 24

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K di caratteristica diversa da due. Una forma quadratica $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ si dice *universale* se $Q(V) = F$.

Dimostrare che se B_Q è non-degenere ed esiste un vettore non nullo v tale che $Q(v) = 0$, allora Q è universale.

[Suggerimento: scegliere $w \in V$ tale che $B_Q(v, w) \neq 0$ (perché esiste?) e calcolare $Q(\lambda v + w)$ al variare di $\lambda \in K$.]

ESERCIZIO 25

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K di caratteristica diversa da due e sia $Q \in \mathrm{Quad}(V)$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) B_Q è non-degenere (diremo in questo caso che Q è non-degenere);

(ii) non esiste nessuna base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di V, tale che il polinomio quadratico $Q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ non involve una delle variabili x_i.

(iii) per ogni base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di V, il vettore nullo è l'unico vettore $v \in V$ tale che $\frac{\partial Q}{\partial x_i}(v) = 0$ per ogni $1 \leq i \leq n$, dove $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ è la derivata parziale i-esima del polinomio quadratico $Q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) \in K[x_1, \ldots, x_n]$.