ESERCIZI SU FORME HERMITIANE E ANTI-HERMITIANE

ESERCIZIO 1

Sia $V = \mathbb{C}^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si considerino le seguenti forme bilineari Hermitiane

(A) $B_1\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 6x_1\overline{y}_1 + x_1\overline{y}_2 + 5x_1\overline{y}_3 + x_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + 2x_2\overline{y}_3 + 5x_3\overline{y}_1 + 2x_3\overline{y}_2 + 6x_3\overline{y}_3$.

(B) $B_2\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 4x_1\overline{y}_1 + x_1\overline{y}_2 + 3x_1\overline{y}_3 + x_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + 2x_2\overline{y}_3 + 3x_3\overline{y}_1 + 2x_3\overline{y}_2 + 4x_3\overline{y}_3$.

(C) $B_3\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = -6x_1\overline{y}_1 - x_1\overline{y}_2 - 5x_1\overline{y}_3 - x_2\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2 - 2x_2\overline{y}_3 - 5x_3\overline{y}_1 - 2x_3\overline{y}_2 - 6x_3\overline{y}_3$.

(D) $B_4\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 2x_1\overline{y}_1 - x_1\overline{y}_2 - x_1\overline{y}_3 - x_2\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2 - 2x_2\overline{y}_3 - x_3\overline{y}_1 - 2x_3\overline{y}_2 - 4x_3\overline{y}_3$.

(E) $B_5\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 5x_1\overline{y}_1 + x_1\overline{y}_2 + 4x_1\overline{y}_3 + x_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + 2x_2\overline{y}_3 + 4x_3\overline{y}_1 + 2x_3\overline{y}_2 + 5x_3\overline{y}_3$.

(F) $B_6\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = 3x_1\overline{y}_1 - x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2 + 2x_2\overline{y}_3 - 2x_3\overline{y}_2 - 3x_3\overline{y}_3$.

Per ciascuna delle forme bilineari precedenti:

(i) Trovare il radicale.
(ii) Determinare il rango.
(iii) Trovare una base ortogonale rispetto alla quale la matrice associata è in forma canonica.
(iv) Determinare la segnatura.

ESERCIZIO 2

Sia $V = \mathbb{C}^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si considerino le seguenti forme bilineari anti-Hermitiane

(A) $B_1\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = i[3x_1\overline{y}_1 + 4x_1\overline{y}_2 - 4x_1\overline{y}_3 + 4x_2\overline{y}_1 + 6x_2\overline{y}_2 - 5x_2\overline{y}_3 - 4x_3\overline{y}_1 - 5x_3\overline{y}_2 + 6x_3\overline{y}_3]$.

(B) $B_2\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = i[x_1\overline{y}_1 + 2x_1\overline{y}_2 + 2x_2\overline{y}_1 + 4x_2\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_3 - x_3\overline{y}_2 - 2x_3\overline{y}_3]$.

(C) $B_3\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = i[-x_1\overline{y}_1 - 2x_1\overline{y}_2 + 2x_1\overline{y}_3 - 2x_2\overline{y}_1 - 4x_2\overline{y}_2 + 3x_2\overline{y}_3 + 2x_3\overline{y}_1 + 3x_3\overline{y}_2 - 4x_3\overline{y}_3]$.

(D) $B_4\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = i[2x_1\overline{y}_1 + 3x_1\overline{y}_2 - 2x_1\overline{y}_3 + 3x_2\overline{y}_1 + 5x_2\overline{y}_2 - 3x_2\overline{y}_3 - 2x_3\overline{y}_1 - 3x_3\overline{y}_2 + 2x_3\overline{y}_3]$.

(E) $B_5\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = i[-x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 - 3x_2\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_3 + x_3\overline{y}_2]$.

(F) $B_6\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = i[x_1\overline{y}_1 + x_1\overline{y}_2 - x_1\overline{y}_3 + x_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_3 - x_3\overline{y}_1 - x_3\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3]$.

Per ciascuna delle forme bilineari precedenti:

(i) Trovare il radicale.
(ii) Determinare il rango.

(iii) Trovare una base ortogonale rispetto alla quale la matrice associata è in forma canonica.
(iv) Determinare la segnatura.

ESERCIZIO 3
Sia F una forma bilineare sesquilineare su uno spazio vettoriale complesso V. Dimostrare che
(i) F è Hermitiana $\Leftrightarrow F(v,v) \in \mathbb{R}$ per ogni $v \in V$.
(ii) F è anti-Hermitiana $\Leftrightarrow F(v,v) \in i\mathbb{R}$ per ogni $v \in V$.

ESERCIZIO 4
Sia B una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale reale V oppure una forma sesquilineare Hermitiana su uno spazio vettoriale complesso V. Dimostrare che per ogni sottospazio $W \subseteq V$ la restrizione $B_{|W}$ è non-degenere se e solo se la segnatura di B è $(\dim V, 0)$ oppure $(0, \dim V)$.

ESERCIZIO 5 [Complessificazione di una forma bilineare simmetrica]
Sia V uno spazio vettoriale reale munito di forma bilineare simmetrica B. Si consideri l'insieme (chiamato la *complessificazione* di V)

$$V^{\mathbb{C}} = \{x + iy \ : \ x, y \in V\},$$

munito della struttura di spazio vettoriale complesso tramite le operazioni

$$\begin{cases} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) & \text{for every } x_1, x_2, y_1, y_2 \in V, \\ (a + ib) \cdot (x + iy) := (ax - by) + i(ay + bx) & \text{for every } x, y \in V \text{and } a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Consideriamo l'applicazione $B^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ (chiamata la *complessificazione* di B) definita da

$$B^{\mathbb{C}}(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = B(x_1, x_2) + B(y_1, y_2) + i[B(y_1, x_2) - B(x_1, y_2)].$$

(i) Dimostrare che $B^{\mathbb{C}}$ è una forma sesquilineare Hermitiana su $V^{\mathbb{C}}$ ed è l'unica tale forma con la proprietà che $(B^{\mathbb{C}})_{|V} = B$, dove V è identificato con il sottospazio reale di $V^{\mathbb{C}}$ degli elementi della forma $\{x + i0 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$.
(ii) Dimostrare che la segnatura di $B^{\mathbb{C}}$ è la stessa della segnatura di B.

ESERCIZIO 5 [Parte reale e parte immaginaria di una forma Hermitiana]
Sia V uno spazio vettoriale complesso e denotiamo con $V_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale tale che $V_{\mathbb{R}} = V$ come gruppo abeliano e la cui moltiplicazione per gli scalari reali è definita da $a \cdot x := (a + i0) \cdot x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $x \in V_{\mathbb{R}}$.
Sia h una forma sesquilineare Hermtiana su V e si considerino le forme bilineari $s = \operatorname{Im} h$ and $a = \operatorname{Im} h$ su $V_{\mathbb{R}}$.
(i) Dimostrare che a è una forma bilineare antisimmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $a(ix, iy) = a(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.
(ii) Dimostrare che s è una forma bilineare simmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.
(iii) Calcolare il rango di s e a in funzione del rango di h. In particolare, dimostrare che: h è non-degenere $\Longleftrightarrow$ s è non-degenere $\Longleftrightarrow$ a è non-degenere.
(iv) Calcolare la segnatura di s in funzione della segnatura di h.

Viceversa:
(A) Sia a una forma bilineare antisimmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $a(ix, iy) = a(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che $h(x, y) := a(ix, y) + ia(x, y)$ definisce una forma sesquilineare Hermitiana su V.

(B) Sia s una forma bilineare simmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che $h(x, y) := s(x, y) + is(x, iy)$ definisce una forma sesquilineare Hermitiana su V.