ESERCIZI SU PRODOTTI SCALARI

ESERCIZIO 1

Si verifichi che ciascuna delle seguenti forme bilineari/sesquilineari è un prodotto scalare e si determini una base ortonormale applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica

(A) $V = \mathbb{R}^3$ e

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3.$$

(B) $V = \mathbb{C}^3$ e

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle := x_1\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2 - x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 + x_3\overline{y}_3.$$

(C) $V = \mathbb{R}^4$ e

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \rangle := x_1y_1 + 6x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_4.$$

(D) $V = \mathbb{C}^4$ e

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \rangle := 2x_1\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2 + x_1\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_1 + 2x_3\overline{y}_3 + x_3\overline{y}_4 + x_4\overline{y}_3 + 2x_4\overline{y}_4.$$

ESERCIZIO 2

Sia $(V, ||.||)$ uno spazio vettoriale normato. Dimostrare che

$$|||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$$

per ogni $u, v \in V$.

ESERCIZIO 3 [Norme $||.||_1$ e $||.||_\infty$]

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e sia $V = \mathbb{K}^n$.

(i) Dimostrare che

$$||(x_1, \ldots, x_n)||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

è una norma su V che non viene da un prodotto scalare.

(ii) Dimostrare che

$$||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty := \max_i \{|x_i|\}$$

è una norma su V che non viene da un prodotto scalare.

ESERCIZIO 4 [Ortogonalità e Teorema di Pitagora]

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario. Dimostrare che:

(i) Se $x, y \in V$ sono ortogonali allora $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

(ii) Se $(V, \langle -, - \rangle)$ è uno spazio euclideo, allora due elementi $x, y \in V$ tali che $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ sono ortogonali.
(iii) Se $(V, \langle -, - \rangle)$ è uno spazio unitario, allora due elementi $x, y \in V$ sono tali che $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ se e solo se $\langle x, y \rangle$ è un numero immaginario puro (anche se diverso da zero).

ESERCIZIO 5[Identità di Parseval]

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di V. Dimostrare che vale la seguente uguaglianza

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle \overline{\langle y, v_i \rangle}$$

per ogni $x, y \in V$.

ESERCIZIO 6[Isometrie]

Sia $T : (V, \langle , \rangle) \to (W, \langle , \rangle)$ una mappa lineare tra due spazi vettoriali euclidei o unitari. Siano $||.||_V$ e $||.||_W$ le norme associate ai due prodotti scalari e siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ due basi ortonormali di, rispettivamente, V e W. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) T è un isometria;
(ii) $||T(x)||_W = ||x||_V$ per ogni $x \in V$;
(iii) T è invertibile e $T^{-1} = T^{\mathrm{adj}}$;
(iv) La matrice $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(T)$ è ortogonale o unitaria, cioè $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(T)$ è invertibile e $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(T)^{-1} = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(T)^*$.

[Suggerimento: per mostrare che (i) $\Leftrightarrow$ (ii) usare le identità di polarizzazione.]

ESERCIZIO 7 [Caratterizzazione delle proiezioni ortogonali]

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario e sia $P : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $P^2 = P$.

(i) Dimostrare che se se $\ker P$ è ortogonale a $\operatorname{Im} P$, allora P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.
(ii) Dimostrare che se $||P(x)|| \leq ||x||$ per ogni $x \in V$ allora P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.

ESERCIZIO 8 [Proiezioni ortogonali lungo sottospazi ortogonali]

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario. Siano W e U due sottopospazi di V e si considerino le proiezioni ortogonali P_U e P_W associate. Dimostrare che

$$P_U \circ P_W = 0 \Leftrightarrow U \perp W.$$

ESERCIZIO 9[Basi ortonormali]

Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario e sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di $(V, \langle , \rangle)$.

(i) Sia $\mathcal{F}$ una base di V. Mostrare che $\mathcal{F}$ è una base ortonormale di $(V, \langle , \rangle)$ se e solo se la matrice di cambiamento di base $A := M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ è una matrice ortogonale se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (cioè tale che $A \cdot A^t = I_n$) e unitaria se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (cioè tale che $A \cdot \overline{A}^t = I_n$).
(ii) Sia $T \in \operatorname{End}(V)$. Mostrare che T è un'isometria di $(V, \langle , \rangle)$ se e solo se $T(\mathcal{E}) = \{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è una base ortonormale di $(V, \langle , \rangle)$.

ESERCIZIO 10[Matrice di Gram]

Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario e sia $\mathcal{O} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una collezione di vettori di V. Si consideri la *matrice di Gram* associata a $\mathcal{O}$:

$$G(\mathcal{O}) = ((\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Dimostrare che $\mathcal{O}$ è un insieme linearmente indipendente se e solo se $\det G(\mathcal{O}) \neq 0$.

ESERCIZIO 11[Triangolarizzazione di operatori]

Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario e sia $T \in \mathrm{End}(V)$.

Usando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, dimostrare che se esiste una base $\mathcal{E}$ tale che $M_{\mathcal{E}}(T)$ è triangolare superiore, allora esiste una base ortonormale $\mathcal{F}$ tale che $M_{\mathcal{F}}(T)$ è triangolare superiore.

ESERCIZIO 12[Prodotto scalare di Frobenius]

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e consideriamo il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $M_{n,n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A^t \cdot \overline{B})$$

definisce un prodotto scalare su $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

ESERCIZIO 13[Prodotto scalare di integrazione]

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ dei polinomi di grado al più n a coefficienti in $\mathbb{K}$. Sia I un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e sia $w : I \to \mathbb{R}_{>0}$ una funzione continua. Dimostrare che

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_I f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$. Si ponga ora $n = 3$ e si applichi il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmitt alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ con le seguenti scelte di I e di w:

(i) $I = [-1, 1]$ e $w \equiv 1$ [Polinomi di Legendre].

(ii) $I = [-1, 1]$ e $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ [Polinomi di Chebyshev di primo tipo].

(iii) $I = [-1, 1]$ e $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$ [Polinomi di Chebyshev di secondo tipo].

(iv) $I = \mathbb{R}$ (anche se non limitato!) e $w(x) = e^{-x^2}$ [Polinomi di Hermite].

ESERCIZIO 14[Serie di Fourier]

Consideriamo lo spazio vettoriale complesso $C([-\pi, \pi])$ delle funzioni continue dall'intervallo $[-\pi, \pi]$ a $\mathbb{C}$ (nota che si tratta di uno spazio vettoriale di dimensione infinita!).

(i) Dimostrare che

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

definisce un prodotto scalare su $C([-\pi, \pi])$.

(ii) Dimostrare che le funzioni $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ formano un insieme ortonormale (infinito!).

(iii) Data una funzione $f(x) \in C([-\pi, \pi])$ che appartiene al sottospazio generato da $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, dimostrare che abbiamo il seguente sviluppo in somma (dunque con un numero finito di termini non nulli!) di Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx},$$

dove $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.