ESERCIZI "PRATICI" SU OPERATORI NORMALI E SPECIALI

ESERCIZIO 1

Sia $\mathbb{C}^2$ munito del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ l'operatore tale che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ è uguale ad una delle seguenti matrici:

(a)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+i & -2i-1 \\ 2i+1 & 2+i \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 3i & 1 \end{pmatrix}.$$

(e)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(h)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

(i)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuno dei casi precedenti:

(i) dire se T è normale, unitario, Hermitiano, anti-Hermitiano, semipositivo, positivo;

(ii) per gli operatori T che sono normali, si trovi una base ortonormale $\mathcal{F}$ tale che $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ è diagonale.

ESERCIZIO 2

Sia $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'operatore tale che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ è uguale ad una delle seguenti matrici:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1/\sqrt{2} & 1-1/\sqrt{2} & -1 \\ 1-1/\sqrt{2} & 1+1/\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(g)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(h)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuno dei casi precedenti:

(i) dire se T è normale, ortogonale, simmetrico, anti-simmetrico, semipositivo, positivo;

(ii) per gli operatori T che sono normali, si trovi una base ortonormale $\mathcal{F}$ tale che $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ è in forma canonica.

ESERCIZIO 3

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sia T_1 un operatore isometrico e autoaggiunto, T_2 un operatore isometrico e semipositivo, e T_3 un operatore isometrico e anti-autoaggiunto. Dire qual è la forma canonica di T_1, T_2 e di T_3.

ESERCIZIO 4

Sia $\mathbb{C}^2$ munito del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ l'operatore tale che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ è uguale ad una delle seguenti matrici:

(a)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuno dei casi precedenti:

(i) trovare una decomposizione polare di T;

(ii) dire quando la decomposizione polare trovata è unica e, nei casi in cui non è unica, determinare tutte le decomposizioni polari di T.

ESERCIZIO 5

Sia $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'operatore tale che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ è uguale ad una delle seguenti matrici:

(a)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuno dei casi precedenti:

(i) trovare una decomposizione polare di T;

(ii) dire quando la decomposizione polare trovata è unica e, nei casi in cui non è unica, determinare tutte le decomposizioni polari di T.

ESERCIZIO 6

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

(i) Si dica quando esiste una matrice ortogonale $O \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $O \cdot A \cdot O^{-1}$ è diagonale.

Per le matrici per cui ciò è possibile, si trovi esplicitamente una tale matrice O e si calcoli $O \cdot A \cdot O^{-1}$.

(ii) Si consideri A come matrice in $M_{2,2}(\mathbb{C})$ e si dica quando esiste una matrice unitaria $U \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ tale che $U \cdot A \cdot U^{-1} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ è diagonale.

Per le matrici A per cui ciò ̀possibile, si trovi esplicitamente una tale matrice U e si calcoli $U \cdot A \cdot U^{-1}$.

(iii) Si trovi una decomposizione polare di A della forma $A = O \cdot P$ con O ortogonale e $P \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ semipositiva.

(iv) Si consideri A come matrice in $M_{2,2}(\mathbb{C})$ e si trovi una decomposizione polare di A della forma $A = U \cdot Q$ con U unitaria e $Q \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ semipositiva.

ESERCIZIO 7

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C}).$$

(i) Dire quando A è normale, Hermitiana, anti-Hermitiana, unitaria, positiva o semipositiva.

(ii) Nei casi in cui A è normale, trovare una matrice unitaria $U \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ tale che $U \cdot A \cdot U^{-1}$ è diagonale.

(iii) Trovare una decomposizione polare di A della forma $A = Q \cdot P$ con Q unitaria e P semipositiva.