ESERCIZI SU SPAZI AFFINI/PROIETTIVI E AFFINITÀ/PROIETTIVITÀ

ESERCIZIO 1 Sia V uno spazio vettoriale.

(A) Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V con mappa associata $\delta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \times V$. Definiamo

$$t : V \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$
$$(v, P) \mapsto t(v, P) \ : \overrightarrow{Pt(v, P)} = v.$$

Dimostrare che t definisce un'azione libera e transitiva di V su $\mathbb{A}$.

(B) Data un'azione

$$t : V \times \mathbb{A} \to \mathbb{A},$$

libera e transitiva di V su insieme non vuoto $\mathbb{A}$, si definisca

$$\delta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$$
$$(P, Q) \mapsto v \ : t(v, P) = Q.$$

Dimostrare che δ definisce una struttura di spazio affine su $\mathbb{A}$ con spazio vettoriale soggiacente V.

ESERCIZIO 2

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e sia $C \in \mathbb{A}$. Si definisce la mappa (detta *simmetria* rispetto a C)

$$\sigma_C : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$
$$P \mapsto \sigma_C(P) \ : \overrightarrow{C\sigma_C(P)} = -\overrightarrow{CP}.$$

Mostrare che:

(i) σ_C è un'affinità di $\mathbb{A}$ con isomorfismo lineare associato $\varphi_{\sigma_C} = -\,\mathrm{id}_V$.
(ii) ogni affinità f tale che $\phi_f = -\,\mathrm{id}_V$ è uguale a σ_C per un unico $C \in \mathbb{A}$.
(iii) $\sigma_D \circ \sigma_C = t_{2\overrightarrow{CD}}$ per ogni $D \in \mathbb{A}$. In particolare, $\sigma_C \circ \sigma_C = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$.
(iv) $t_v \circ \sigma_C = \sigma_{t_v(C)} \circ t_v$ per ogni $v \in V$.
(v) Se $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_F$, allora $\sigma_C(P) = 2C - P$.

ESERCIZIO 3

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un F-spazio vettoriale V, sia $O \in \mathbb{A}$ e sia $\lambda \in F^*$. Si definisca un'applicazione (detta *omotetia* di centro O e fattore λ)

$$\omega_{O,\lambda} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$
$$P \mapsto \omega_{O,\lambda}(P) \ : \overrightarrow{O\omega_{O,\lambda}(P)} = \lambda\overrightarrow{OP}.$$

Mostrare che:

(i) $\omega_{O,\lambda}$ è un'affinità di $\mathbb{A}$ con isomorfismo lineare associato $\lambda\,\mathrm{id}_V$.
(ii) $\omega_{O,1} = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ per ogni $O \in \mathbb{A}$.
(iii) ogni affinità f tale che $\phi_f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ con $\lambda \neq 1$ è uguale a $\omega_{O,\lambda}$ per un unico $O \in \mathbb{A}$.
(iv) $t_v \circ \omega_{O,\lambda} = \omega_{t_v(O),\lambda} \circ t_v$ per ogni $v \in V$.
(v) l'applicazione

$$\omega_{O,-} : (F^*, \cdot) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$$
$$\lambda \mapsto \omega_{O,\lambda},$$

è un omomorfismo iniettivo di gruppi.

(vi) $\omega_{O',\lambda^{-1}} \circ \omega_{O,\lambda} = t_{(1-\lambda^{-1})\overrightarrow{OO'}}$ per ogni $O' \in \mathbb{A}$.

(vii) Se $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_F$, allora $\omega_{O,\lambda}(P) = \lambda P + (1-\lambda)O$.

ESERCIZIO 4

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su V. Una collezione di punti $\{P_0, \ldots, P_N\}$ di $\mathbb{A}$ si dice *indipendente* se

$$\dim\langle \overrightarrow{P_iP_j}\rangle_{1\le i,j\le N} = N = |\{P_0,\ldots,P_N\}| - 1.$$

In particolare se $\{P_0, \ldots, P_N\}$ è indipendente allora $|\{P_0,\ldots,P_N\}| \le n+1$.

(A) Data una collezione di punti $\{P_0, \ldots, P_N\}$ di $\mathbb{A}$, mostrare che

$$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_N}\rangle = \langle \overrightarrow{P_iP_j}\rangle_{1\le i,j\le N}.$$

[Suggerimento: $\overrightarrow{P_iP_j} = \overrightarrow{P_0P_j} - \overrightarrow{P_0P_i}$.]

(B) Mostrare che $\{P_0, \ldots, P_n\}$ è indipendente se e solo se $(P_0, \{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\})$ è un sistema di riferimento affine di $\mathbb{A}$.

[Suggerimento: usare (A)]

(C) Dimostrare che $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ agisce in maniera libera e transitiva sugli insiemi indipendenti $\{P_0, \ldots, P_n\}$ di $\mathbb{A}$.

[Suggerimento: usare (B)]

(D) Fissiamo $1 \le N \le n$. Mostrare che $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ agisce in maniera transitiva sugli insiemi indipendenti $\{P_0, \ldots, P_N\}$ di $\mathbb{A}$.

[Suggerimento: completare $\{P_0, \ldots, P_N\}$ ad un sistema indipendente di cardinalità $n+1$ e poi usare (C).]

ESERCIZIO 5

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n. Una collezione di punti $\{P_0 = [v_0], \ldots, P_N = [v_N]\}$ di $\mathbb{P}$ si dice *in posizione generale* se una delle seguenti condizioni è verificata:

- $N \le n$ e $\dim\langle v_0, \ldots, v_N\rangle = N+1$;
- $N > n$ e una qualsiasi sottocollezione di $\{v_0, \ldots, v_N\}$ di cardinalità $n+1$ è un base di V.

(A) Data un sistema di riferimento proiettivo $[\mathcal{E}] := [\{v_0, \ldots, v_n\}]$ di $\mathbb{P}$, si considerino i seguenti punti di $\mathbb{P}$ (detti rispettivamente punti fondamentali e punto unità di $[\mathcal{E}]$):

$$F_i([\mathcal{E}]) := [v_i] \quad \text{per ogni } 0 \le i \le n \quad \text{e} \quad U([\mathcal{E}]) := \left[\sum_{j=0}^n v_j\right].$$

Mostrare che $\{F_0([\mathcal{E}]), \ldots, F_n([\mathcal{E}]), U([\mathcal{E}])\}$ sono in posizione generale.

(B) Data una collezione di punti $\{P_0, \ldots, P_n, P_{n+1}\}$ di $\mathbb{P}$ in posizione generale, dimostrare che esiste ed è unico un sistema di riferimento proiettivo $[\mathcal{E}]$ di $\mathbb{P}$ tale che

$$P_i = F_i([\mathcal{E}]) \quad \text{per ogni } 0 \le i \le n \quad \text{e} \quad P_{n+1} = U([\mathcal{E}]).$$

(C) Dimostrare che $\mathrm{PGL}(\mathbb{P})$ agisce in maniera libera e transitiva sulle collezioni di $n+2$ punti $\{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ di $\mathbb{P}$ in posizione generale.

[Suggerimento: usare (A) e (B).]

(D) Fissiamo $0 \le N \le n+1$. Mostrare che $\mathrm{PGL}(\mathbb{P})$ agisce in maniera transitiva sule collezioni di $N+1$ punti $\{P_0, \ldots, P_N\}$ di $\mathbb{P}$ in posizione generale.

[Suggerimento: completare $\{P_0, \ldots, P_N\}$ ad una collezione di punti in posizione generale di cardinalità $n+2$ e poi usare (C).]