ESERCIZI SU SOTTOSPAZI AFFINI E PROIETTIVI

ESERCIZIO 1

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su V. Data una collezione di punti $\{P_0, \dots, P_N\}$ di $\mathbb{A}$, il *sottospazio affine generato* da $\{P_0, \dots, P_N\}$, denotato con $\overline{P_0 \cdots P_N}$, è il sottospazio affine di giacitura $\langle \overrightarrow{P_0 P_i} \rangle_{1 \leq i \leq N}$ e passante per P_0.

Mostrare che:

(A) $\overline{P_0 \cdots P_N}$ non dipende dall'ordine dei punti;
(B) $\overline{P_0 \cdots P_N}$ è il più piccolo sottospazio affine contenente l'insieme $\{P_0, \dots, P_N\}$.

ESERCIZIO 2

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine, e siano $W_1, W_2 \leq \overrightarrow{\mathbb{A}}$ e $Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}$. Consideriamo il sottospazio affine $S_1 \leq \mathbb{A}$ di giacitura W_1 e passante per Q_1 e il sottospazio affine $S_2 \leq \mathbb{A}$ di giacitura W_2 e passante per Q_2. Dimostrare che

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow W_1 = W_2 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{Q_1 Q_2} \in W_1 = W_2.$$

ESERCIZIO 3

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su $V = \overrightarrow{\mathbb{A}}$.

Due sottospazi affini S e T si dicono *paralleli*, in simboli $S||T$, se $\overrightarrow{S} \subseteq \overrightarrow{T}$ oppure $\overrightarrow{T} \subseteq \overrightarrow{S}$.

Dimostrare che se S e T sono paralleli, allora o $S \subseteq T$ oppure $T \subseteq S$ oppure $S \cap T = \emptyset$.

ESERCIZIO 4

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su $V = \overrightarrow{\mathbb{A}}$.

(A) Sia S un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ con giacitura $\overrightarrow{S}$ e sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$. Dimostrare che $f(S)$ è un sottospazio affine tale che $\overrightarrow{f(S)} = \phi_f(\overrightarrow{S})$.
(B) Due sottospazi affini S e T sono *affinemente equivalenti*, cioè esiste un'affinità $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ tale che $f(S) = T$, se e solo se $\dim S = \dim T$.

ESERCIZIO 5

Consideriamo il piano affine numerico $\mathbb{A}^2_F$.

(A) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta di giacitura $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e passante per $P = (2, -1)$.
(B) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta passante per $Q_1 = (1, 2)$ e $Q_2 = (-1, 1)$.

ESERCIZIO 6

Consideriamo il piano affine numerico $\mathbb{A}^2_F$. Per ciascuna delle seguenti coppie di rette, dire se sono parallele, incidenti (cioè se la loro intersezione non è vuota) o sghembe (cioè se la loro intersezione è vuota). Nel caso di coppie di rette incidenti, calcolare l'intersezione delle due rette e dire se si tratta di una retta o di un punto.

(A) $r_1 : \{Y_1 - Y_2 = 1\}$ e $s_1 : \{2Y_1 - 2Y_2 = 1\}$.
(B) $r_2 : \{Y_1 - Y_2 = 1\}$ e $s_2 : \{2Y_1 - 2Y_2 = 2\}$.
(C) $r_3 : \{Y_1 - Y_2 = 1\}$ e $s_3 : \{Y_1 + 2Y_2 = 2\}$.

ESERCIZIO 7

Consideriamo il piano affine numerico $\mathbb{A}^2_F$. Per ciascuna delle seguenti terne di punti, dire se sono collineari (cioè se appartengono ad una stessa retta) o no.

(A) $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,1)$ e $P_3 = (1,1)$.
(B) $Q_1 = (1,0)$, $Q_2 = (0,1)$ e $Q_3 = (2,-1)$.

ESERCIZIO 8

Consideriamo lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$.

(A) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana del piano di giacitura $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e passante per $P = (2,-1,1)$.
(B) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana del piano passante per $Q_1 = (1,2,1)$, $Q_2 = (-1,1,1)$ e $Q_3 = (1,-2,-1)$.

ESERCIZIO 9

Consideriamo lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$.

(A) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta di giacitura $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e passante per $P = (2,-1,1)$.
(B) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta passante per $Q_1 = (1,2,1)$ e $Q_2 = (-1,1,0)$.

ESERCIZIO 10

Consideriamo lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$. Per ciascuna delle seguenti coppie di piani, dire se sono paralleli, incidenti (cioè se la loro intersezione non è vuota) o sghembi (cioè se la loro intersezione è vuota). Nel caso di coppie di piani incidenti, calcolare l'intersezione dei due piani, e dire se si tratta di un piano, di una retta o di un punto.

(A) $\Pi_1 : \{Y_1 - Y_2 + Y_3 = 1\}$ e $\Sigma_1 : \{2Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 = 1\}$.
(B) $\Pi_2 : \{Y_1 - Y_2 + Y_3 = 1\}$ e $\Sigma_2 : \{2Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 = 2\}$.
(C) $\Pi_3 : \{Y_1 - Y_2 + Y_3 = 1\}$ e $\Sigma_3 : \{Y_1 + 2Y_2 - Y_3 = 2\}$.

ESERCIZIO 11

Consideriamo lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$. Per ciascuna delle seguenti coppie di piano e retta, dire se sono paralleli, incidenti (cioè se la loro intersezione non è vuota) o sghembi (cioè se la loro intersezione è vuota). Nel caso di coppie incidenti, calcolare l'intersezione e dire se si tratta di una retta o di un punto.

(A) $\Pi_1 : \{Y_1 - Y_2 - Y_3 = 1\}$ e $r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in F \right\}$.

(B) $\Pi_2 : \{Y_1 - Y_2 - Y_3 = 1\}$ e $r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in F \right\}$

(C) $\Pi_3 : \{Y_1 - Y_2 - Y_3 = 1\}$ e $r_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} : t \in F \right\}$

ESERCIZIO 12

Consideriamo lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$. Si considerino le seguenti coppie di rette

(A) $s_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u+1 \\ -u \\ -u \end{pmatrix} : u \in F \right\}$ e $r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in F \right\}$;
(B) $s_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u+1 \\ u+1 \\ u \end{pmatrix} : u \in F \right\}$ e $r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in F \right\}$;
(C) $s_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ -u+1 \\ -u \end{pmatrix} : u \in F \right\}$ e $r_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in F \right\}$.

Per ciascuna di esse:

(i) dire se sono parallele, incidenti (cioè se la loro intersezione non è vuota) o sghembe (cioè se la loro intersezione è vuota);
(ii) calcolare l'intersezione;
(iii) dire se c'è un piano che le contiene, e in caso affermativo, scrivere un'equazione cartesiana per questo piano.

ESERCIZIO 13

Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$ si considerino le seguenti terne di punti

(A) $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (1, 1, 0)$ e $P_3 = (1, 2, 0)$.
(B) $Q_1 = (1, 0, 0)$, $Q_2 = (1, 1, 0)$ e $Q_3 = (1, 2, 1)$.

Per ciascuna di queste terne:

(i) dire se i punti sono allineati (cioè se giacciono su una stessa retta) e in caso affermativo scrivere un'equazione parametrica della retta che li contiene;
(ii) se i punti non sono allineati, dimostrare che c'è un unico piano che li contiene e scrivere un equazione cartesiana di tale piano.

ESERCIZIO 14

Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$, si scriva l'equazione cartesiana del piano Π contenente la retta $r = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in F \right\}$ e passante per $P = (1, 1, 0)$.

ESERCIZIO 15

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e siano $W_1, W_2 \leq V$. Dimostrare che

$$\mathbb{P}(W_1) = \mathbb{P}(W_2) \Leftrightarrow W_1 = W_2.$$

ESERCIZIO 16

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e siano $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \leq \mathbb{P}(V)$ due sottospazi proiettivi. Dimostrare che se

$$\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) \geq \dim \mathbb{P}(V) \Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset.$$

[Suggerimento: usare la formula di Grassmann proiettiva.]

ESERCIZIO 17

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n.

(A) Sia $\mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ e sia $[\phi] \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P})$. Dimostrare che $[\phi](\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(\phi(W))$.
(B) Due sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W)$ e $\mathbb{P}(U)$ sono *proiettivamente equivalenti*, cioè esiste una proiettività $[\phi] \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P})$ tale che $[\phi](\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(U)$, se e solo se $\dim \mathbb{P}(W) = \dim \mathbb{P}(U)$.

ESERCIZIO 18

Nel piano affine numerico $\mathbb{A}^2_F$ si considerino le seguenti rette

$$r : \{Y_1 - Y_2 = 1\} \quad \text{e} \quad s : \{2Y_1 - 2Y_2 = 1\}\,.$$

(A) Mostrare che r e s sono parallele e sghembe.
(B) Scrivere equazioni cartesiane per le chiusure proiettive $\overline{r}$ e $\overline{s}$ in $\mathbb{P}^2_F$.
(C) Calcolare i punti all'infinito di $\overline{r}$ e $\overline{s}$.
(D) Mostrare che $\overline{r}$ e $\overline{s}$ si intersecano.

ESERCIZIO 19

Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$ si considerino i due seguenti piani

$$\Pi : \{Y_1 - Y_2 + Y_3 = 1\} \quad \text{e} \quad \Sigma : \{2Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 = 1\}\,.$$

(A) Mostrare che Π e Σ sono paralleli e sghembi.
(B) Scrivere equazioni cartesiane per le chiusure proiettive $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Sigma}$ in $\mathbb{P}^3_F$.
(C) Calcolare i punti all'infinito di $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Sigma}$.
(D) Calcolare l'intersezione di $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Sigma}$.

ESERCIZIO 20

Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_F$ si considerino il piano e la retta

$$\Pi : \{Y_1 - Y_2 - Y_3 = 1\} \quad \text{e} \quad r = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in F \right\}.$$

(A) Mostrare che Π e r sono paralleli e sghembi.
(B) Scrivere equazioni cartesiane per le chiusure proiettive $\overline{\Pi}$ e $\overline{r}$ in $\mathbb{P}^3_F$.
(C) Calcolare i punti all'infinito di $\overline{\Pi}$ e $\overline{r}$.
(D) Calcolare l'intersezione di $\overline{\Pi}$ e $\overline{r}$.