Nome candidato: Numero di matricola:

APPELLO A DEL CORSO GE210
2 FEBBRAIO 2018

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1(8 punti)

Sia $V = K^4$ (con K campo) con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Consideriamo la forma bilineare

$$B\left(\sum_{i=1}^{4} x_i e_i, \sum_{j=1}^{4} y_j e_j\right) = x_1y_2 - x_1y_3 + x_1y_4 - x_2y_1 + x_3y_1 + x_3y_4 - x_4y_1 - x_4y_3$$

e l'operatore $T \in \mathrm{End}(V)$ definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{4} x_i e_i\right) = (2x_1 - x_2 + x_3 - x_4)e_1 + (x_1 + 2x_3 - 3x_4)e_2 + (3x_3 - 4x_4)e_3 + (x_3 - x_4)e_4.$$

(i) Dimostrare che B è antisimmetrica e non degenere.
(ii) Scrivere (V, B) come somma diretta ortogonale di due piani simplettici iperbolici.
(iii) Dimostrare che T è un isometria di (V, B).
(iv) Scrivere T come prodotto di trasvezioni simplettiche di (V, B).

ESERCIZIO 2(8 punti)

Sia $V = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e si consideri la forma bilineare

$$B\left(\sum_{i=1}^{4} x_i e_i, \sum_{j=1}^{4} y_j e_j\right) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

(i) Dimostrare che B è simmetrica e non degenere e calcolarne il discriminante.
(ii) Trovare una base di V rispetto alla quale B abbia forma canonica.
(iii) Trovare un sottospazio totalmente degenere massimale di (V, B).
(iv) Trovare un sottospazio iperbolico massimale di (V, B).
(v) Determinare una decomposizione anisotropica di (V, B).

ESERCIZIO 3(8 punti)

Siano (V_1, B_1) e (V_2, B_2) due spazi ortogonali non-degeneri (su un campo K di caratteristica diversa da 2) di dimensione uguale a $\dim(V_1) = \dim(V_2) := 2m + 1$, con $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Assumiamo che $w(B_1) = w(B_2) = m$ (dove $w(B_i)$ è l'indice di Witt di (V_i, B_i)). Dimostrare che (V_1, B_1) e (V_2, B_2) sono isometrici se e solo se $\mathrm{disc}(B_1) = \mathrm{disc}(B_2)$.

[Suggerimento: Si considerino le decomposizioni anisotropiche di (V_1, B_1) e (V_2, B_2).]

ESERCIZIO 4(6 punti)

Sia $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$ e sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'operatore definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right) = \frac{x_1 - x_2}{2} e_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} e_2 + 2x_3 e_3.$$

(i) Dire se T è normale, ortogonale, simmetrico, anti-simmetrico, semipositivo, positivo.
(ii) Se T è normale, trovare una base ortonormale $\mathcal{F}$ di $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ è in forma canonica.

ESERCIZIO 5(8 punti)

Sia $\mathbb{C}^2$ munito del prodotto scalare standard $\langle -,-\rangle$ e sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ la base canonica. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ l'operatore definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i\right) = \frac{(1+2i)x_1 + (-2-i)x_2}{2} e_1 + \frac{(2+i)x_1 + (1+2i)x_2}{2} e_2.$$

(i) Dire se T è normale, unitario, Hermitiano, anti-Hermitiano, semipositivo, positivo.

(ii) Se T è normale, trovare una base ortonormale $\mathcal{F}$ di $(\mathbb{C}^2, \langle -,-\rangle)$ tale che $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ è in forma canonica.

(iii) Trovare una decomposizione polare di T e dire se è unica o no.

ESERCIZIO 6(6 punti)

Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_K$ (con K campo), si consideri la conica:

$$\mathcal{C} := \{X_0X_1 + X_1X_2 + X_0X_2 = 0\}.$$

(i) Supponiamo che $K = \mathbb{R}$. Trovare una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che trasforma $\mathcal{C}$ in forma canonica.

(ii) Supponiamo che $K = \mathbb{C}$. Trovare una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ che trasforma $\mathcal{C}$ in forma canonica.