Nome candidato: Numero di matricola:

APPELLO B DEL CORSO GE210
22 FEBBRAIO 2018

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1(7 punti)

Sia $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e si consideri la forma bilineare

$$B\left(\sum_{i=1}^{4} x_i e_i, \sum_{j=1}^{4} y_j e_j\right) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_4 - x_3y_1 + 3x_3y_3 + 3x_3y_4 - x_4y_2 + 3x_4y_3 + 6x_4y_4.$$

(i) Dimostrare che B è simmetrica e non degenere. Calcolare il discriminante di B.
(ii) Trovare un sottospazio totalmente degenere massimale U di (V, B).
(iii) Trovare un'estensione iperbolica del sottospazio U trovato in (ii).
(iv) Determinare una decomposizione anisotropica di (V, B).
(v) Trovare una base di V rispetto alla quale B abbia forma canonica e determinare la segnatura di B.

ESERCIZIO 2(6 punti)

Sia $\mathbb{C}^2$ munito del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$ e sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ la base canonica. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ l'operatore definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i\right) = \frac{3x_1 + ix_2}{2} e_1 + \frac{-ix_1 + 3x_2}{2} e_2.$$

(i) Dire se T è normale, unitario, Hermitiano, anti-Hermitiano, semipositivo, positivo.
(ii) Se T è normale, trovare una base ortonormale $\mathcal{F}$ di $(\mathbb{C}^2, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ è in forma canonica.

ESERCIZIO 3(6 punti)

Sia $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$ e sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'operatore definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right) = \frac{x_1 - x_2 + \sqrt{2}x_3}{2} e_1 + \frac{-x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3}{2} e_2 + \frac{-\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2}{2} e_3.$$

(i) Dire se T è normale, ortogonale, simmetrico, anti-simmetrico, semipositivo, positivo.
(ii) Se T è normale, trovare una base ortonormale $\mathcal{F}$ di $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ è in forma canonica.

ESERCIZIO 4(7 punti)

Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\mathcal{E} := \{e_1, e_2\}$. Si consideri la forma bilineare

$$B\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i, \sum_{j=1}^{2} y_j e_j\right) = 5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$$

e l'operatore $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i\right) = (-3x_1 - x_2)e_1 + (7x_1 + 3x_2)e_2.$$

(i) Dimostrare che B è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.
(ii) Trovare una base ortonormale di (V, B).
(iii) Trovare tutte le decomposizione polari di T in (V, B).

ESERCIZIO 5 (7 punti)
Sia $V = K^2$ (con K campo arbitrario) con base canonica $\mathcal{E} := \{e_1, e_2\}$. Si consideri la forma bilineare alterna non-degenere

$$B\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i, \sum_{j=1}^{2} y_j e_j\right) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1,$$

e l'operatore $T \in \mathrm{End}(K^2)$ definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i\right) = \frac{2x_1 - x_2}{2} e_1 + 2x_1 e_2.$$

(i) Trovare una base simplettica di (V, B).
(ii) Dimostrare che T è un'isometria di (V, B).
(iii) Scrivere T come prodotto di trasvezioni simplettiche.

ESERCIZIO 6 (8 punti)
Sia V uno spazio vettoriale complesso e denotiamo con $V_\mathbb{R}$ lo spazio vettoriale reale tale che $V_\mathbb{R} = V$ come gruppo abeliano e la cui moltiplicazione per gli scalari reali è definita da $a \cdot x := (a + i0) \cdot x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $x \in V_\mathbb{R}$.
Sia h una forma sesquilineare Hermitiana su V e si considerino le forme bilineari $s = \mathrm{Im}\, h$ and $a = \mathrm{Im}\, h$ su $V_\mathbb{R}$.
(i) Dimostrare che a è una forma bilineare antisimmetrica su $V_\mathbb{R}$ tale che $a(ix, iy) = a(x, y)$ per ogni $x, y \in V_\mathbb{R}$.
(ii) Dimostrare che s è una forma bilineare simmetrica su $V_\mathbb{R}$ tale che $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni $x, y \in V_\mathbb{R}$.
(iii) Calcolare il rango di s e a in funzione del rango di h. In particolare, dimostrare che: h è non-degenere $\iff$ s è non-degenere $\iff$ a è non-degenere.
(iv) Calcolare l'indice di s in funzione dell'indice di h.

Viceversa:
(A) Sia a una forma bilineare antisimmetrica su $V_\mathbb{R}$ tale che $a(ix, iy) = a(x, y)$ per ogni $x, y \in V_\mathbb{R}$. Dimostrare che $h(x, y) := a(ix, y) + ia(x, y)$ definisce una forma sesquilineare Hermitiana su V.
(B) Sia s una forma bilineare simmetrica su $V_\mathbb{R}$ tale che $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni $x, y \in V_\mathbb{R}$. Dimostrare che $h(x, y) := s(x, y) + is(x, iy)$ definisce una forma sesquilineare Hermitiana su V.