Nome candidato:
Numero di matricola:

SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE210
16 GENNAIO 2018

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1(6 punti)

Sia $V = \mathbb{C}^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e considerare la seguente forma Hermitiana

$$H\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = 3x_1\overline{y_1} - 2x_1\overline{y_2} + (1+3i)x_1\overline{y_3} - 2x_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} - (1+2i)x_2\overline{y_3} +$$

$$+(1-3i)x_3\overline{y_1} - (1-2i)x_3\overline{y_2} + 4x_3\overline{y_3}.$$

Trovare una base di V rispetto a cui H abbia la forma canonica.

ESERCIZIO 2(10 punti)

Sia $V = \mathbb{C}^2$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$. Si consideri la forma sesquilineare H su V definita da

$$H\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i, \sum_{j=1}^{2} y_j e_j\right) = 5x_1\overline{y_1} - 3ix_1\overline{y_2} + 3ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}.$$

e l'operatore T su V definito da

$$T(x_1e_1 + x_2e_2) = (4x_1 + 2x_2)e_1 + \frac{(6-i)x_1 + (6+i)x_2}{2}e_2.$$

(i) Dimostrare che H è un prodotto scalare su V.
(ii) Applicando il procedimento di Gramm-Schmidt alla base canonica $\mathcal{E}$, trovare una base ortonormale $\mathcal{F}$ di V rispetto al prodotto scalare H.
(iii) Dimostrare che T è un operatore normale di (V, H).
(iv) Trovare una base ortonormale di (V, H) rispetto a cui T sia diagonale.

ESERCIZIO 3(10 punti)

Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ formato dai polinomi in una variabile x a coefficienti in $\mathbb{R}$ e di grado al più 2.

(i) Sia
$$\langle -, - \rangle : V \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(p(x), q(x)) \mapsto \langle p(x), q(x) \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$
Dimostrare che $\langle -, - \rangle$ è un prodotto scalare su V.
(ii) Applicando il procedimento di Gramm-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$, trovare una base ortonormale di V rispetto al prodotto scalare $\langle -, - \rangle$.
(iii) Si consideri l'operatore
$$D : V \longrightarrow V$$
$$p(x) \mapsto p'(x).$$
Trovare una decomposizione polare di D.
(iv) Si dica se la decomposizione polare trovata nel punto precedente è unica e, nel caso in cui non lo fosse, trovare tutte le decomposizioni polari di D.

ESERCIZIO 4(6 punti)

Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_K$ (con K campo arbitrario), si considerino le due collezioni seguenti di 4 punti:

$$\mathcal{A} := \{p_0 = [0,1,0], p_1 = [0,0,1], p_2 = [1,0,0], p_3 = [1,-1,2]\},$$
$$\mathcal{B} := \{q_0 = [0,1,0], q_1 = [0,0,1], q_2 = [1,0,0], q_3 = [1,-1,0]\}.$$

(i) Dire se i punti in $\mathcal{A}$ (rispettivamente, in $\mathcal{B}$) sono in posizione generale.

(ii) Trovare tutte le proiettività di $\mathbb{P}^2_K$ (qualora esistano) che mandano i quattro punti ordinati
$$\{e_0 = [1,0,0], e_1 = [0,1,0], e_2 = [0,0,1], e_3 = [1,1,1]\}$$
nei quattro punti ordinati di $\mathcal{A}$ (rispettivamente, di $\mathcal{B}$).

ESERCIZIO 5(10 punti)

Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su un campo K sia $P : V \to V$ un'applicazione lineare idempotente, cioé tale che $P^2 = P$.

(i) Dimostrare che $1 - P$ è idempotente e $\ker P = \operatorname{Im}(1-P)$ e $\operatorname{Im} P = \ker(1-P)$, dove $1 = \mathrm{id}_V$.

(ii) Dimostrare che $V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$.

(iii) Supponiamo ora che $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e sia $\langle -, - \rangle$ un prodotto scalare su V. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.
   (b) P è una proiezione ortogonale.
   (c) $\ker P$ è ortogonale a $\operatorname{Im} P$.
   (d) $||P(v)|| \leq ||v||$ per ogni $v \in V$.
   (e) P è semipositivo.
   (f) P è autoaggiunto.
   (g) P è normale.