PRIMO FOGLIO DI ESERCIZI DI PREPARAZIONE AL PRIMO ESONERO DI GEOMETRIA 2

ESERCIZIO 1

Sia (V, B) uno spazio ortogonale non-degenere su un campo K di caratteristica diversa da 2. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) (V, B) é un piano iperbolico;
(ii) esiste un vettore isotropico non nullo;
(iii) il discriminante $\mathrm{disc}(B)$ di B é $[-1] \in K^*/(K^*)^2$.

ESERCIZIO 2

Sia $V = K^2$ (con K campo di caratteristica diversa da 2) e si consideri la forma bilineare simmetrica

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 - y_1y_2.$$

Trovare una base iperbolica di (V, B).

ESERCIZIO 3

Sia $V = K^2$ (con K campo di caratteristica diversa da 2) e si consideri la forma bilineare simmetrica

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

(i) Se $K = \mathbb{C}$ allora trovare una base iperbolica di (V, B).
(ii) Se $K = \mathbb{R}$ allora dimostrare che (V, B) non é un piano iperbolico.

ESERCIZIO 4

Sia $V = K^2$ e consideriamo la forma simplettica standard

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

(i) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{Sp}(V, B)$ é della forma

$$\eta_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{per una matrice } A \in M_{2,2}(K) \text{ tale che } \det A = 1.$$

(ii) Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ scrivere η_A come prodotto di trasvezione smplettiche.
(iii) Scrivere ogni elemento η_A come prodotto di trasvezioni simplettiche.

ESERCIZIO 5

Sia $V = K^2$ (con K campo di caratteristica diversa da 2) e consideriamo la forma bilineare simmetrica iperbolica

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_1.$$

(i) Dimostrare che l'insieme dei vettori isotropi é

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in K\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \ : \ \mu \in K\right\}.$$

(ii) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{O}^+(V,B)$ è della forma

$$\psi_a\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax \\ a^{-1}y \end{pmatrix} \quad \text{con } a \in K^*,$$

e che ogni elemento di $\mathrm{O}^-(V,B)$ è della forma

$$\widetilde{\psi}_b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} by \\ b^{-1}x \end{pmatrix} \quad \text{con } b \in K^*,$$

(iii) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{O}^-(V,B)$ è una simmetria.

(iv) Scrivere ψ_2 come prodotto di simmetrie.

(v) Scrivere ogni elemento ψ_a come prodotto di simmetrie.

ESERCIZIO 6

Sia $V = K^2$ (con K campo di caretteristica diversa da 2) e consideriamo la forma bilineare simmetrica standard

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

(i) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{O}(V,B)$ è della forma

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{per una matrice } A \in M_{2,2}(K) \ \text{ tale che } A \cdot A^t = I_2.$$

(ii) Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{O}^-(V,B)$ è una simmetria.

(iii) Scrivere ogni elemento ϕ_A come prodotto di simmetrie.