TERZO FOGLIO DI ESERCIZI

ESERCIZIO [Complessificazione di una forma bilineare simmetrica]

Sia V uno spazio vettoriale reale munito di forma bilineare simmetrica B. Si consideri l'insieme (chiamato la *complessificazione* di V)

$$V^{\mathbb{C}} = \{x + iy \ : \ x, y \in V\},$$

munito della struttura di spazio vettoriale complesso tramite le operazioni

$$\begin{cases} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \text{ for every } x_1, x_2, y_1, y_2 \in V, \\ (a + ib) \cdot (x + iy) := (ax - by) + i(ay + bx) \text{ for every } x, y \in V \text{and } a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Consideriamo l'applicazione $B^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ (chiamata la *complessificazione* di B) definita da

$$B^{\mathbb{C}}(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = B(x_1, x_2) + B(y_1, y_2) + i[B(y_1, x_2) - B(x_1, y_2)].$$

(i) Dimostrare che $B^{\mathbb{C}}$ è una forma sesquilineare Hermitiana su $V^{\mathbb{C}}$ ed è l'unica tale forma con la proprietà che $(B^{\mathbb{C}})_{|V} = B$, dove V è identificato con il sottospazio reale di $V^{\mathbb{C}}$ degli elementi della forma $\{x + i0 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Dimostrare che l'indice di $B^{\mathbb{C}}$ è lo stesso dell'indice di B. In particolare, B è un prodotto scalare se e solo se $B^{\mathbb{C}}$ è un prodotto scalare.

ESERCIZIO [Parte reale e parte immaginaria di una forma Hermitiana]

Sia V uno spazio vettoriale complesso e denotiamo con $V_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale tale che $V_{\mathbb{R}} = V$ come gruppo abeliano e la cui moltiplicazione per gli scalari reali è definita da $a \cdot x := (a + i0) \cdot x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $x \in V_{\mathbb{R}}$.

Sia h una forma sesquilineare Hermtiana su V e si considerino le forme bilineari $s = \operatorname{Im} h$ and $a = \operatorname{Im} h$ su $V_{\mathbb{R}}$.

(i) Dimostrare che a è una forma bilineare antisimmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $a(ix, iy) = a(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.

(ii) Dimostrare che s è una forma bilineare simmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.

(iii) Calcolare il rango di s e a in funzione del rango di h. In particolare, dimostrare che: h è non-degenere $\iff$ s è non-degenere $\iff$ a è non-degenere.

(iv) Calcolare l'indice di s in funzione dell'indice di h.

Viceversa:

(A) Sia a una forma bilineare antisimmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $a(ix, iy) = a(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che $h(x, y) := a(ix, y) + ia(x, y)$ definisce una forma sesquilineare Hermitiana su V.

(B) Sia s una forma bilineare simmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che $h(x, y) := s(x, y) + is(x, iy)$ definisce una forma sesquilineare Hermitiana su V.

ESERCIZIO [Sottospazi tutti non-degeneri]

Sia B una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale reale V oppure una forma sesquilineare Hermitiana su uno spazio vettoriale complesso V. Dimostrare che per ogni sottospazio $W \subseteq V$ la restrizione $B_{|W}$ è non-degenere se e solo se l'indice di B è $(\dim V, 0)$ oppure $(0, \dim V)$.

ESERCIZIO

Sia $(V, ||.||)$ uno spazio vettoriale normato. Dimostrare che

$$||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$$

per ogni $u, v \in V$.

ESERCIZIO [Norme $||.||_1$ e $||.||_\infty$]

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e sia $V = \mathbb{K}^n$.

(i) Dimostrare che

$$||(x_1, \ldots, x_n)||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

è una norma su V che non viene da un prodotto scalare.

(ii) Dimostrare che

$$||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty := \max_i \{|x_i|\}$$

è una norma su V che non viene da un prodotto scalare.

ESERCIZIO [Distanze che vengono da norme]

Sia (V, d) uno spazio metrico con V spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Dimostrare che d è la distanza associata ad una norma su V se e solo se d verifica le seguenti proprietà:

(i) $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ per ogni $x, y, z \in V$.

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x, y \in V$.

In tal caso, la norma è unica ed è data da

$$||x|| = d(x, 0).$$

ESERCIZIO [Ortogonalità e Teorema di Pitagora]

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario. Dimostrare che:

(i) Se $x, y \in V$ sono ortogonali allora $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

(ii) Se $(V, \langle -, - \rangle)$ è uno spazio euclideo, allora due elementi $x, y \in V$ tali che $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ sono ortogonali.

(iii) Se $(V, \langle -, - \rangle)$ è uno spazio unitario, allora due elementi $x, y \in V$ sono tali che $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ se e solo se $\langle x, y \rangle$ è un numero immaginario puro (anche se diverso da zero).

ESERCIZIO [Identità di Parseval]

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di V. Dimostrare che vale la seguente uguaglianza

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle \overline{\langle y, v_i \rangle}$$

per ogni $x, y \in V$.

ESERCIZIO [Isometrie in termini della norma]

Siano $(V, \langle -, - \rangle_V)$ e $(W, \langle -, - \rangle_W)$ due spazi vettoriali euclidei o unitari. Siano $||.||_V$ e $||.||_W$ le norme associate ai due prodotti scalari. Dimostrare che una mappa lineare $T : V \to W$ è un isometria se e solo se

$$||T(x)||_W = ||x||_V$$

per ogni $x \in V$.

[Suggerimento: usare le identità di polarizzazione.]

ESERCIZIO [Caratterizzazione delle proiezioni ortogonali]

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario e sia $P : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $P^2 = P$.

(i) Dimostrare che se se $\ker P$ è ortogonale a $\operatorname{Im} P$, allora P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.

(ii) Dimostrare che se $||P(x)|| \leq ||x||$ per ogni $x \in V$ allora P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.

ESERCIZIO [Prodotto scalare di Frobenius]

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e consideriamo il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $M_{n,n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(A^t \cdot \overline{B})$$

definisce un prodotto scalare su $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

ESERCIZIO [Prodotto scalare di integrazione]

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ dei polinomi di grado al più n a coefficienti in $\mathbb{K}$. Sia I un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e sia $w : I \to \mathbb{R}_{>0}$ una funzione continua. Dimostrare che

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_I f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$. Si ponga ora $n = 3$ e si applichi il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmitt alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ con les seguenti scelte di I e di w:

(i) $I = [-1, 1]$ e $w \equiv 1$ [Polinomi di Legendre].

(ii) $I = [-1, 1]$ e $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ [Polinomi di Chebyshev di primo tipo].

(iii) $I = [-1, 1]$ e $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$ [Polinomi di Chebyshev di secondo tipo].

(iv) $I = \mathbb{R}$ (anche se non limitato!) e $w(x) = e^{-x^2}$ [Polinomi di Hermite].

ESERCIZIO [Serie di Fourier]

Consideriamo lo spazio vettoriale complesso $C([-\pi, \pi])$ delle funzioni continue dall'intervallo $[-\pi, \pi]$ a $\mathbb{C}$ (nota che si tratta di uno spazio vettoriale di dimensione infinita!).

(i) Dimostrare che

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

definisce un prodotto scalare su $C([-\pi, \pi])$.

(ii) Dimostrare che le funzioni $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ formano un insieme ortonormale (infinito!).

(iii) Data una funzione $f(x) \in C([-\pi, \pi])$ che appartiene al sottospazio generato da $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, dimostrare che abbiamo il seguente sviluppo in somma (dunque con un numero finito di termini non nulli!) di Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx},$$

dove $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.