QUARTO FOGLIO DI ESERCIZI

ESERCIZIO [Trasformazioni idempotenti]

Sia $(V, \langle -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo o unitario e sia $P : V \to V$ un'applicazione lineare idempotente, cioé tale che $P^2 = P$.

(i) Dimostrare che $1 - P$ è idempotente e $\ker P = \operatorname{Im}(1 - P)$ e $\operatorname{Im} P = \ker(1 - P)$, dove $1 = \mathrm{id}_V$.

(ii) Dimostrare che $V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P = \operatorname{Im}(1 - P) \oplus \ker(1 - P)$.

(iii) Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) P è la proiezione ortogonale su $\ker P$.

(b) P è una proiezione ortogonale.

(c) $\ker P$ è ortogonale a $\operatorname{Im} P$.

(d) P è semipositivo.

(e) P è autoaggiunto.

(f) P è normale.

ESERCIZIO [Polinomio caratteristico e polinomio minimo dell'aggiunto]

Sia $(V, \langle, -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ munito di un prodotto scalare. Sia $T \in \operatorname{End}(V)$ e denotiamo con $c_T(x) \in \mathbb{K}[x]$ il polinomio caratteristico di T e con $m_T(x) \in \mathbb{K}[x]$ il polinomio minimo di T. Dato $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ denotiamo con $\overline{p(x)} \in \mathbb{K}[x]$ il polinomio ottenuto da $p(x)$ applicando il coniugio complesso ad ogni coefficiente di $p(x)$. Mostrare che:

(i) $c_{T^{\mathrm{adj}}}(x) = \overline{c_T(x)}$.

(ii) $m_{T^{\mathrm{adj}}}(x) = \overline{m_T(x)}$.

ESERCIZIO [Composizione di un operatore con il suo aggiunto]

Siano $(V, \langle, -, - \rangle)$ e $(W, \langle -, - \rangle)$ due spazi vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ munito di prodotti scalare. Sia $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Mostrare che:

(i) $\ker(T \circ T^{\mathrm{adj}}) = \ker(T^{\mathrm{adj}})$ e $\ker(T^{\mathrm{adj}} \circ T) = \ker(T)$.

(ii) $\operatorname{Im}(T \circ T^{\mathrm{adj}}) = \operatorname{Im}(T)$ e $\operatorname{Im}(T^{\mathrm{adj}} \circ T) = \operatorname{Im}(T^{\mathrm{adj}})$.

(iii) T è iniettiva se e solo se $T^{\mathrm{adj}} \circ T$ è un isomorfismo.

(iv) T è suriettiva se e solo se $T \circ T^{\mathrm{adj}}$ è un isomorfismo.

ESERCIZIO[Decomposizione come somma di un autoaggiunto e un anti-autoaggiunto]

Sia $(V, \langle, -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare e sia $T \in \operatorname{End}(V)$. Si ponga $R := \frac{1}{2}(T + T^a) \in \operatorname{End}(V)$ and $S := \frac{1}{2}(T - T^a) \in \operatorname{End}(V)$.

(i) Mostrare che R è autoaggiunto e S è anti-autoaggiunto e che vale $T = R + S$.

(ii) Mostrare che se $T = R_1 + S_1$ con R_1 autoaggiunto e S_1 è anti-autoaggiunto, allora $R_1 = R$ e $S_1 = S$.

(iii) Mostrare che T è normale se e solo se $R \circ S = S \circ R$.

ESERCIZIO [Ortogonalità di v e Tv]

Sia $(V, \langle, -, - \rangle)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ munito di un prodotto scalare e sia $T \in \operatorname{End}(V)$.

(1) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mostrare che:

(i) Se $\langle Tv, v \rangle = 0$ per ogni $v \in V$ allora $T \equiv 0$.
[Suggerimento: scrivere $\langle Tv, w \rangle$ in funzione di $\langle T(v \pm w), v \pm w \rangle$ e $\langle T(v \pm iw), v \pm iw \rangle$]

(ii) T è Hermitiano (resp. anti-Hermitiano) se e solo se $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ (resp. $i\mathbb{R}$) per ogni $v \in V$.
[Suggerimento: scrivere $\langle Tv, v\rangle \pm \overline{\langle Tv, v\rangle} = \langle (T \pm T^a)(v), v\rangle$ e usare il punto precedente].

(2) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Mostrare che:
  (i) Se T è simmetrica e $\langle Tv, v\rangle = 0$ per ogni $v \in V$ allora $T \equiv 0$.
  [Suggerimento: scrivere $\langle Tv, w\rangle$ in funzione di $\langle T(v \pm w), v \pm w\rangle$.]
  (ii) T è anti-simmetrica allora $\langle Tv, v\rangle = 0$ per ogni $v \in V$.

ESERCIZIO [Caratterizzazione degli operatori normali]
Sia $(V, \langle, -, -\rangle)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ munito di un prodotto scalare e sia $T \in \mathrm{End}(V)$.

(1) Mostrare che T è normale se e solo se $||Tv|| = ||T^a v||$ per ogni $v \in V$.
[Suggerimento: sviluppare $\langle (T \circ T^a - T^a \circ T)(v), v\rangle$ per ogni $v \in V$ e usare l'esercizio precendente.]
(2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora mostrare che T è normale se e solo se per ogni $U \subset V$ sottospazio T-invariante si ha che $U^\perp$ è T-invariante.
[Suggerimento: l'implicazione $\Rightarrow$ è stata fatta a lezione (e vale anche per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$); per l'implicazione $\Leftarrow$ mostrare che l'ipotesi sui sottospazi di V implica che T è ortonormalmente diagonalizzabile.]
(3) Mostrare con un esempio che la precedente asserzione è falsa se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
[Suggerimento: esistono tali esempi $T \in \mathrm{End}(V)$ con $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$.]

ESERCIZIO [Diagonalizzazione ortonormale simultanea e Commutatività]
Sia $(V, \langle, -, -\rangle)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ munito di un prodotto scalare e siano $S, T \in \mathrm{End}(V)$. Assumiamo che S e T siano entrambi normali se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o entrambi simmetrici se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(i) Dimostrare che S e T possono essere ortonormalmente diagonalizzati simultaneamente (cioè che esiste un base ortonormale $\mathcal{E}$ tale che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S)$ e $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ sono diagonali) se e solo se S e T commutano.
[Suggerimento: per la parte difficile $\Leftarrow$ dimostrare che gli autospazi di S sono T-invarianti.]
(ii) Dimostrare che S e T commutano se e solo se esiste un polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ (di grado uguale al più $\dim V - 1$) tale che $T = f(S)$.
[Suggerimento: per la parte difficile $\Rightarrow$, usare l'esercizo precedente e la formula di interpolazione di Lagrange.]

ESERCIZIO [Relazione tra operatori e forme]
Sia $(V, \langle, -, -\rangle)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ munito di un prodotto scalare.

(i) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathrm{End}(V) &\longrightarrow \mathrm{Bil}(V)/\,\mathrm{Sesq}(V), \\ T &\mapsto \mathcal{L}_T : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}, \\ &\qquad (x, y) \mapsto \mathcal{L}_T(x, y) := \langle T(x), y\rangle, \end{aligned}$$

è un isomorfismo (lineare) di spazi vettoriali su $\mathbb{R}/\mathbb{C}$.

[Suggerimento: per trovare l'inverso si usi (e dimostri) che dato $y \in V$ ed un funzionale lineare $l \in V^*$, esiste un'unico operatore $T \in \mathrm{End}(V)$ tale che $\langle Tx, y\rangle = l(x)$ per ogni $x \in V$.]

(ii) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned}\mathcal{R} : \mathrm{End}(V) &\longrightarrow \mathrm{Bil}(V)/\,\mathrm{Sesq}(V),\\ T &\mapsto \mathcal{R}_T : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C},\\ &(x, y) \mapsto \mathcal{R}_T(x, y) := \langle x, T(y)\rangle,\end{aligned}$$

è un isomorfismo semilineare di spazi vettoriali su $\mathbb{R}/\mathbb{C}$.

[Suggerimento: per trovare l'inverso si usi (e dimostri) che dato $x \in V$ ed un funzionale semilineare $l \in \overline{V^*}$, esiste un'unico operatore $T \in \mathrm{End}(V)$ tale che $\langle x, T(y)\rangle = l(y)$ per ogni $y \in V$.]

(iii) Dimostrare che le due composizioni $\mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ e $\mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ coincidono con l'isomorfismo semilineare

$$\begin{aligned}\mathrm{adj} : \mathrm{End}(V) &\longrightarrow \mathrm{End}(V)\\ T &\mapsto T^a.\end{aligned}$$

(iv) Dimostrare che T è simmetrico/Hermitiano se e solo se $\mathcal{R}_T$ è simmetrico/Hermitiano se e solo se $\mathcal{L}_T$ è simmetrico/Hermitiano se e solo se $\mathcal{R}_T = \mathcal{L}_T$.

(v) Dimostrare che T è anti-simmetrico/anti-Hermitiano se e solo se $\mathcal{R}_T$ è anti-simmetrico/anti-Hermitiano se e solo se $\mathcal{L}_T$ è anti-simmetrico/anti-Hermitiano se e solo se $\mathcal{R}_T = -\mathcal{L}_T$.

(vi) Dimostrare che T è un operatore positivo se e solo se $\mathcal{R}_T = \mathcal{L}_T$ è un prodotto scalare.

(vii) Se T è un operatore positivo e S è un operatore su V, calcolare l'aggiunto di S rispetto al prodotto scalare $\mathcal{R}_T = \mathcal{L}_T$.

ESERCIZIO [Proprietà degli operatori positivi]

Sia $(V, \langle, -, -\rangle)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ munito di un prodotto scalare. Siano $T, S \in \mathrm{End}(V)$ due operatori positivi. Dimostrare che:

(1) $S + T$ è un operatore positivo.
(2) cT è un operatore positivo per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$.
(3) T^{-1} è un operatore positivo.
(4) Se $ST = TS$ allora ST è un operatore positivo. In particolare, T^k è positivo per ogni $k \geq 1$.

ESERCIZIO [Normalità in termini della decomposizione polare]

Sia T un operatore su uno spazio vettoriale $(V, \langle, -, -\rangle)$ su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ munito di un prodotto scalare. Considerare una decomposizione polare $T = Q \cdot P$ con Q isometrica e $P \geq 0$. Dimostrare che T è normale se e solo se $PQ = QP$.

[Suggerimento: per la parte difficile $\Rightarrow$, usare usare che P è un polinomio in P^2 (perché?).]

ESERCIZIO [Matrice di Gram]

Sia $(V, \langle, -, -\rangle)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ di dimensione n munito di un prodotto scalare.

Per ogni collezione di n vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, si consideri la matrice (detta **matrice di Gram** dei vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$)

$$G(v_1, \ldots, v_n) = \left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{i,j} \in M_{n,n}(\mathbb{K}).$$

(i) Dimostrare che $G(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$.

(ii) Dimostrare che $G(v_1, \ldots, v_n) > 0$ se e solo se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti.

(iii) Dimostrare che ogni matrice semipositiva A è la matrice di Gram di una qualche collezione di vettori.

[Suggerimento: usare che A ammette una radice quadrata B semipositiva.]

(iv) Dimostrare che $G(v_1, \ldots, v_n) = G(w_1, \ldots, w_n)$ se e solo se esiste una trasformazione isometrica che manda $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

[Suggerimento: per la parte difficile $\Rightarrow$ usare la decomposizione polare degli operatori.]