SOLUZIONI DELL'APPELLO B DEL CORSO GE210
22 FEBBRAIO 2018

ESERCIZIO 1(7 punti)
Sia $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e si consideri la forma bilineare

$$B\left(\sum_{i=1}^{4} x_i e_i, \sum_{j=1}^{4} y_j e_j\right) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_4 - x_3y_1 + 3x_3y_3 + 3x_3y_4 - x_4y_2 + 3x_4y_3 + 6x_4y_4.$$

(i) Dimostrare che B è simmetrica e non degenere. Calcolare il discriminante di B.
(ii) Trovare un sottospazio totalmente degenere massimale U di (V, B).
(iii) Trovare un'estensione iperbolica del sottospazio U trovato in (ii).
(iv) Determinare una decomposizione anisotropica di (V, B).
(v) Trovare una base di V rispetto alla quale B abbia forma canonica e determinare la segnatura di B.

Soluzione:

(i) La matrice di B rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è

$$M_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M_{\mathcal{E}}(B)$ è simmetrica e

$$\det M_{\mathcal{E}}(B) = 1.$$

Dunque B è non-degenere e simmetrica, e il discriminante di B è uguale a $\mathrm{disc}(B) = [1] \in \mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2$.

(v) Siccome i minori principali di $M_{\mathcal{E}}(B)$ sono tutti positivi, il criterio di Sylvester implica che B è definita positiva e dunque la segnatura di B è $(4, 0)$. Una base $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ tale che $M_{\mathcal{F}}(B) = I_4$ é data da

$$\begin{cases} f_1 = e_1, \\ f_2 = e_2, \\ f_3 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4, \\ f_4 = \dfrac{-2e_1 + e_2 - 2e_3 + e_4}{\sqrt{13}}. \end{cases}$$

(ii) Siccome B è definita positiva, allora l'unico sottospazio totalmente degenere massimale è uguale a $U = (0)$.
(iii) L'estensione iperbolica $\overline{U}$ di U è uguale a (0).
(iv) Siccome B è definita positiva, allora (V, B) è anisotropica.

ESERCIZIO 2(6 punti)

Sia $\mathbb{C}^2$ munito del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$ e sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ la base canonica. Sia $T \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^2)$ l'operatore definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i\right) = \frac{3x_1 + ix_2}{2} e_1 + \frac{-ix_1 + 3x_2}{2} e_2.$$

(i) Dire se T è normale, unitario, Hermitiano, anti-Hermitiano, semipositivo, positivo.
(ii) Se T è normale, trovare una base ortonormale $\mathcal{F}$ di $(\mathbb{C}^2, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ è in forma canonica.

Soluzione:
Il polinomio caratteristico di T è uguale a

$$c_T(\lambda) = \det \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda & i \\ -i & 3 - 2\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Le radici di $c_T(\lambda)$, che sono gli autovalori di T, sono 1 e 2. Gli autospazi corrispondenti sono:

$$E_1(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad E_2(T) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Chiaramente $E_1(T)$ e $E_2(T)$ sono ortogonali. Quindi T è ortonormalmente diagonalizzabile, che equivale a normale visto che il campo base è $\mathbb{C}$. Inoltre:

- T è positiva (e dunque semipositiva e Hermitiana) visto che T è normale con autovalori positivi;
- T non è anti-Hermitana in quanto gli autovalori non sono numeri immaginari puri;
- T non è unitaria in quanto gli autovalori non hanno norma uno.

Infine, la base ortonormale $\mathcal{F} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è tale che

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è in forma canonica.

ESERCIZIO 3(6 punti)
Sia $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$ e sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica. Sia $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ l'operatore definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right) = \frac{x_1 - x_2 + \sqrt{2}x_3}{2} e_1 + \frac{-x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3}{2} e_2 + \frac{-\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2}{2} e_3.$$

(i) Dire se T è normale, ortogonale, simmetrico, anti-simmetrico, semipositivo, positivo.
(ii) Se T è normale, trovare una base ortonormale $\mathcal{F}$ di $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ tale che $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ è in forma canonica.

Soluzione:
(i) La matrice di T rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è uguale a

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Chiaramente la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ non è né simmetrica né antisimmetrica, e dunque T non è né simmetrico (e dunque neanche positivo o semipositivo) né antisimmetrico.

D'altra parte è facile vedere che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)^t = I_3$, il che implica che T è ortogonale e dunque anche normale.

(ii) Il polinomio caratteristico di T è uguale a

$$c_T(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1).$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$ è dato da

$$E_1(T) = \left\langle f_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2) \right\rangle.$$

Scegliamo una base ortogonale dell'ortogonale di $E_1(T)$:

$$E_1(T)^\perp = \left\langle f_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), f_3 := e_3 \right\rangle.$$

Rispetto alla base ortonormale $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$, la matrice di T è in forma canonica uguale a

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4(7 punti)

Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\mathcal{E} := \{e_1, e_2\}$. Si consideri la forma bilineare

$$B\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i, \sum_{j=1}^{2} y_j e_j\right) = 5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$$

e l'operatore $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i\right) = (-3x_1 - x_2)e_1 + (7x_1 + 3x_2)e_2.$$

(i) Dimostrare che B è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

(ii) Trovare una base ortonormale di (V, B).

(iii) Trovare tutte le decomposizione polari di T in (V, B).

Soluzione:

(i) La matrice di B rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è

$$M_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M_{\mathcal{E}}(B)$ è simmetrica e ha i due minori principali positivi; dunque B è una forma bilineare definita positiva, cioè un prodotto scalare.

(ii) Una base ortonormale per B è data da $\mathcal{F} := \{f_1 = e_1 - e_2, f_2 = -e_1 + 2e_2\}$.

(iii) Scriviamo la matrice di T nella base ortonormale $\mathcal{F}$:

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{F}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una decomposizione polare per T è una scrittura nella forma $T = P \cdot Q$ con $P \geq 0$ e Q ortogonale. Siccome T è invertibile (come si vede facilmente dalla matrice $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$), allora P sarà definita positiva e dunque invertibile. Questo implica che $Q = P^{-1} \cdot T$. Inoltre sappiamo dalla teoria che $P = \sqrt{T \cdot T^a}$.

Possiamo ora passare alle matrici (rispetto alla base ortonormale $\mathcal{F}$) e troviamo che

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(P) = \sqrt{M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)^a} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(Q) = M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(P)^{-1} \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 5 (7 punti)

Sia $V = K^2$ (con K campo arbitrario) con base canonica $\mathcal{E} := \{e_1, e_2\}$. Si consideri la forma bilineare alterna non-degenere

$$B\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i, \sum_{j=1}^{2} y_j e_j\right) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1,$$

e l'operatore $T \in \mathrm{End}(K^2)$ definito da

$$T\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i\right) = \frac{2x_1 - x_2}{2} e_1 + 2x_1 e_2.$$

(i) Trovare una base simplettica di (V, B).
(ii) Dimostrare che T è un'isometria di (V, B).
(iii) Scrivere T come prodotto di trasvezioni simplettiche.

Soluzione:

(i) Osserviamo innanzitutto che se $\mathrm{char}(K) = 2$, allora l'esercizio è sbagliato perché B è identicamente nulla e T non è ben definita. Dunque assumiamo nel prosieuguo che $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Una base simplettica per B è data da $\mathcal{F} := \{f_1 = \frac{e_1}{2}, e_2\}$, visto che $B(f_1, f_2) = 1$.

(ii) La matrice di T rispetto alla base $\mathcal{F}$ è data da:

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome il gruppo delle isometrie del piano simplettico standard è isomorfo al gruppo delle matrici 2×2 a determinante uno (come visto a lezione) e siccome $\det M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = 1$, allora T è un isometria di (V, B).

(iii) Consideriamo la trasvezione simplettica $\tau_{-f_2,1}$ che manda (f_1, f_2) in $(f_1 + f_2, f_2)$. In seguito consideriamo la trasvezione simplettica $\tau_{f_1+f_2,1}$ che manda $(f_1 + f_2, f_2)$ in $(f_1 + f_2, -f_1)$. Dunque concludiamo che $T = \tau_{f_1+f_2,1} \circ \tau_{-f_2,1}$ in quanto essi assumono gli stessi valori sulla base simplettica (f_1, f_2).

ESERCIZIO 6 (8 punti)

Sia V uno spazio vettoriale complesso e denotiamo con $V_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale tale che $V_{\mathbb{R}} = V$ come gruppo abeliano e la cui moltiplicazione per gli scalari reali è definita da $a \cdot x := (a + i0) \cdot x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $x \in V_{\mathbb{R}}$.

Sia h una forma sesquilineare Hermitiana su V e si considerino le forme bilineari $s = \mathrm{Re}\, h$ and $a = \mathrm{Im}\, h$ su $V_{\mathbb{R}}$.

(i) Dimostrare che a è una forma bilineare antisimmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $a(ix, iy) = a(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.
(ii) Dimostrare che s è una forma bilineare simmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.

(iii) Calcolare il rango di s e a in funzione del rango di h. In particolare, dimostrare che: h è non-degenere $\iff$ s è non-degenere $\iff$ a è non-degenere.

(iv) Calcolare l'indice di s in funzione dell'indice di h.

Viceversa:

(A) Sia a una forma bilineare antisimmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $a(ix, iy) = a(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che $h(x, y) := a(ix, y) + ia(x, y)$ definisce una forma sesquilineare Hermitiana su V.

(B) Sia s una forma bilineare simmetrica su $V_{\mathbb{R}}$ tale che $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni $x, y \in V_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che $h(x, y) := s(x, y) + is(x, iy)$ definisce una forma sesquilineare Hermitiana su V.

Soluzione:

Per definizione, abbiamo che $h(x, y) = s(x, y)+ia(x, y)$ per ogni $x, y \in V$. Dal fatto che h è sesquilineare segue subito che a e s sono bilineari. Siccome h è Hermitiana, abbiamo che

$$\begin{cases} s(y, x) + ia(y, x) = h(y, x) = \overline{h(x, y)} = \overline{s(x, y) + ia(x, y)} = s(x, y) - ia(x, y), \\ s(ix, iy) + ia(ix, iy) = h(ix, iy) = h(x, y) = s(x, y) + ia(x, y). \end{cases}$$

Questo dimostra (i) e (ii).

Ora supponiamo che h abbia indice (p, q) e dunque rango $\mathrm{rk}(h) = p+q$. Dal teorema di struttura delle forme sesquilineari Hermitiane, abbiamo che esiste una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che

$$h(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq j = k \leq p, \\ -1 & \text{se } p + 1 \leq j = k \leq p + q, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{0.1}$$

Dalla definizione di $V_{\mathbb{R}}$ segue che una base di $V_{\mathbb{R}}$ è data da $\{e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n\}$. Dalla proprietà (0.1), deduciamo le seguenti relazioni

$$h(ie_j, e_k) = ih(e_j, e_k) = -h(e_j, ie_k) = \begin{cases} i & \text{se } 1 \leq j = k \leq p, \\ -i & \text{se } p + 1 \leq j = k \leq p + q, , \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{0.2}$$

$$h(ie_j, ie_k) = h(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq j = k \leq p, \\ -1 & \text{se } p + 1 \leq j = k \leq p + q, , \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{0.3}$$

Mettendo insieme le relazioni (0.1), (0.2) e (0.3), si evince che a ha rango uguale a $2\,\mathrm{rk}(h)$ mentre a ha segnatura uguale a $(2p, 2q)$, e dunque rango uguale a $2\,\mathrm{rk}(h)$. Questo mostra (iii) e (iv).

Ora mostriamo i punti (A) e (B), facendo vedere che in entrambi i casi la forma h è $\mathbb{C}$-lineare nella prima variabile e coniugata simmetrica (questo basta per dire che h è sesquilineare e Hermitiana).

(A) La $\mathbb{C}$-linearità di h rispetto alla prima variabile segue dalla $\mathbb{R}$-linearità di a rispetto alla prima variabile e dalla relazione:

$$h(ix, y) = a(i^2x, y) + ia(ix, y) = -a(x, y) + ia(ix, y) = i[ia(ix, y) + ia(x, y)] = ih(x, y).$$

La simmetria coniugata segue dall'antisimmetria di a e dalla relazione $a(ix, iy) = a(x, y)$ nel seguente modo:

$$h(y, x) = a(iy, x) + ia(y, x) = a(y, -ix) - ia(x, y) = a(ix, y) - ia(x, y) = \overline{h(x, y)}.$$

(B) La $\mathbb{C}$-linearità di h rispetto alla prima variabile segue dalla $\mathbb{R}$-linearità di s rispetto alla prima variabile e dalla relazione (usando che $s(ix, iy) = s(x, y)$):

$$h(ix, y) = s(ix, y) + is(ix, iy) = s(x, -iy) + is(x, y) = -s(x, iy) + is(x, y) = \\ = i[is(x, iy) + s(x, y)] = ih(x, y).$$

La simmetria coniugata segue dalla simmetria di a e dalla relazione $s(ix, iy) = s(x, y)$ nel seguente modo:

$$h(y, x) = s(y, x) + is(y, ix) = s(x, y) + is(-iy, x) = s(x, y) - is(x, iy) = \overline{h(x, y)}.$$