SOLUZIONI DELLA PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE210
13 NOVEMBRE 2017

ESERCIZIO 1

Sia K un campo e consideriamo il K-spazio vettoriale $V = M_{2,2}(K)$. Per ogni $M \in M_{2,2}(K)$ si consideri l'applicazione bilineare

$$F_M : V \times V \longrightarrow K$$
$$(A, B) \mapsto F_M(A, B) := \mathrm{tr}(A^t \cdot M \cdot B).$$

(i) Dimostrare che l'applicazione

$$F : V \longrightarrow \mathrm{Bil}(V)$$
$$M \mapsto F_M$$

è lineare e iniettiva.

(ii) Stabilire per quali $M \in V$ si ha che F_M è simmetrica o antisimmetrica o alterna. Assumendo che $\mathrm{char}(K) \neq 2$, scrivere F_M come una somma di un'applicazione bilineare simmetrica e una antisimmetrica.

(iii) Calcolare $\mathrm{rad}^L(F_M)$ e $\mathrm{rad}^R(F_M)$.

(iv) Calcolare il rango di F_M in funzione del rango di M. In particolare, dire per quali $M \in V$ si ha che F_M è non-degenere.

Soluzione:

(i) Scriviamo $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Possiamo esplicitare la forma bilineare F_M come segue:

$$F_M\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\right) = a(x_1y_1+x_2y_2)+d(x_3y_3+x_4y_4)+b(x_1y_3+x_2y_4)+c(x_3y_1+x_4y_2).$$

Siccome la forma bilineare F_M dipende linearmente dai coefficienti a, b, c, d, allora la mappa $M \mapsto F_M$ è lineare. Inoltre, i coefficienti a, b, c, d sono determinati dalla forma F_M e dunque $M \mapsto F_M$ è inettiva.

(ii) Usando l'espressione esplicita per F_M trovata nel punto (i), deduciamo che la matrice di F_M rispetto alla base canonica

$$\mathcal{E} := \left\{ E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

è data da

$$M_{\mathcal{E}}(F_M) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Dunque deduciamo che:

- F_M è simmetrica $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{E}}(F_M)$ è simmetrica $\Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow M$ è simmetrica;
- F_M è antisimmetrica $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{E}}(F_M)$ è antisimmetrica $\Leftrightarrow a = -a, d = -d, b = -c \Leftrightarrow M$ è antisimmetrica;
- F_M è alterna $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{E}}(F_M)$ è alterna $\Leftrightarrow a = 0, d = 0, b = -c \Leftrightarrow M$ è alterna.

Se la caratteristica di K è diversa da 2, allora possiamo scrivere M come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica (o equivalentemente alterna):

$$M = M^{\text{sym}} + M^{\text{alt}} := \frac{M + M^t}{2} + \frac{M - M^t}{2}.$$

Per la linearità della mappa $M \to F_M$ e per quanto sopra mostrato, abbiamo che

$$F_M = F_{M^{\text{sym}}} + F_{M^{\text{alt}}},$$

con $F_{M^{\text{sym}}}$ simmetrica e $F_{M^{\text{alt}}}$ anitisimmetrica.

(iii) Per definizione il radicale sinistro è uguale a

$$\text{rad}^L(F_M) = \{A \in M_{2,2}(K) \ : \ \text{tr}(A^t \cdot M \cdot B) = 0 \ \text{ per ogni } B \in M_{2,2}(K)\}.$$

Imponendo che $\text{tr}(A^t \cdot M \cdot B) = 0$ per ogni elemento B della base canonica $\mathcal{E}$, si vede che $A^t \cdot M = 0$. Dunque otteniamo che il radicale sinistro è uguale a:

$$\text{rad}^L(F_M) = \{A \in M_{2,2}(K) \ : \ A^t \cdot M = 0\}.$$

In maniera simile, si vede che

$$\text{rad}^R(F_M) = \{B \in M_{2,2}(K) \ : \ M \cdot B = 0\}.$$

(iv) Il rango di F_M è uguale al rango della matrice $M_{\mathcal{E}}(F_M)$. Siccome $M_{\mathcal{E}}(F_M) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}^*}(R_{F_M})$ e $\text{rad}^R(F_M) = \ker(R_M)$, otteniamo che il rango di F_M è uguale a

$$\text{rk}(F_M) = \dim M_{2,2}(V) - \dim\ker(R_M) = 4 - \dim \text{rad}^R(F_M).$$

Ora distinguiamo tre casi:

- Se $M = 0$ allora $F_M \equiv 0$ e dunque $\text{rk}(F_M) = 0$.
- Se M è non-degenere, allora $M \cdot B = 0$ implica che $B = 0$. Dunque $\text{rad}^R(F_M) = (0)$, che implica $\text{rk}(F_M) = 4$.
- Se M ha rango 1, allora le colonne di M sono proporzionali tra di loro e non entrambe nulle. Dunque possiamo scrivere $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 v & \lambda_2 v \end{pmatrix}$, con v vettore non nullo di K^2 e $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$. Allora il radicale destro di F_M è uguale a

$$\text{rad}^R(F_M) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2}(K) \ : \ \begin{pmatrix} \lambda_1 v & \lambda_2 v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2}(K) \ : 0 = \begin{pmatrix} (\mu_{11}\lambda_1 + \mu_{21}\lambda_2)v & (\mu_{12}\lambda_1 + \mu_{22}\lambda_2)v \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2}(K) \ : \mu_{11}\lambda_1 + \mu_{21}\lambda_2 = 0 \ \text{ and } \ \mu_{12}\lambda_1 + \mu_{22}\lambda_2 = 0 \right\}.$$

  Siccome $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ allora lo spazio delle soluzioni del sistema $\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$ ha dimensione uguale a 1. Quindi, il radicale destro di F_M ha dimensione 2, il che implica $\text{rk}(F_M) = 2$.

Ricapitolando, abbiamo che $\text{rk}(F_M) = 2\,\text{rk}(M)$. In particolare, F_M è non degenere se e solo se M è non-degenere.

ESERCIZIO 2

Sia $V = \mathbb{C}^4$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e si consideri la forma bilineare antisimmetrica

$$B\left(\sum_{i=1}^4 x_i e_i, \sum_{j=1}^4 y_j e_j\right) = -x_3y_1 + x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_3 - x_4y_1 + x_1y_4 - 2x_4y_2 + 2x_2y_4.$$

Dimostrare che B è non-degenere e trovare una base simplettica di (V, B).

Soluzione: La matrice di B rispetto alla base canonica è:

$$M_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Facendo lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga, si vede che il determinante di $M_{\mathcal{E}}(B)$ è uguale a 1, e dunque B è non-degenere.

Per trovare una base simplettica, consideriamo prima la coppia iperbolica $\{v_1 = e_1, v_2 = e_3\}$. L'ortogonale del sottospazio generato da $\{v_1, v_2\}$ è uguale a:

$$W := \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp} = \left\{ v = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \ : \begin{cases} 0 = B(e_1, v) = x_3 + x_4, \\ 0 = B(e_3, v) = -x_1 - x_2. \end{cases} \right\} = \langle w_1 := e_1 - e_2, w_2 := e_3 - e_4 \rangle.$$

Siccome $B(w_1, w_2) = 1$, la coppia $\{w_1, w_2\}$ è una coppia iperbolica di $(W, B_{|W})$. Dunque una base simplettica di V è

$$\{e_1, e_3, e_1 - e_2, e_3 - e_4\}.$$

ESERCIZIO 3

Sia (V, B) uno spazio simplettico non-degenere. Dimostrare che ogni elemento del gruppo simplettico $\mathrm{Sp}(V, B)$ ha determinante uguale a 1.

[Suggerimento: si usino le trasvezioni simplettiche.]

Soluzione:

Siccome ogni elemento del gruppo simplettico è un prodotto di trasvezioni simplettiche, basta mostrare che le trasvezioni simplettiche hanno determinante uguale a 1.

Sia dunque $\tau_{v,a}$ una trasvezione simplettica (con $v \neq 0$). Il determinante di $\tau_{v,a}$ è, per definizione, il determinante della matrice di $\tau_{v,a}$ rispetto ad una base qualsiasi di V.

Possiamo scegliere una base simplettica $\mathcal{E} = \{u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\}$ di V tale che $v_1 = v$. Infatti, siccome B è non-degenere, allora esisterà un elemento u_1 tale che $B(u_1, v) \neq 0$, e a meno di rinormalizzare u_1 possiamo supporre che $B(u_1, v) = 1$. Ora consideriamo il sottospazio $W := \langle u_1, v_1 := v \rangle^{\perp}$ munito della forma bilineare anti-simmetrica $B_{|W}$. Tale forma è non-degenere perché B è non-degenere e $V = \langle u_1, v_1 \rangle \oplus^{\perp} W$. Dunque possiamo scegliere una base simplettica $\{u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n\}$ di $(W, B_{|W})$. Allora l'insieme $\mathcal{E} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n\}$ è una base simplettica di V con la proprietà che $v_1 = v$.

Rispetto a tale base $\mathcal{E}$, la matrice della trasvezione simplettica $\tau_{v=v_1,a}$ è una matrice diagonale a blocchi delle forma

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\tau_{v,a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ a & 1 & \\ & & I_{2n-2} \end{pmatrix},$$

il cui determinante è chiaramente uguale a 1, q.e.d.

ESERCIZIO 4

Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si consideri la forma bilineare simmetrica

$$B\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_3.$$

(i) Trovare un base di V rispetto a cui B abbia la forma canonica (di Sylvester).

(ii) Si consideri la mappa lineare $\eta := -\mathrm{id}_V \in \mathrm{GL}(V)$. Dimostrare che $\eta \in O^{-}(V, B)$, cioé che η è una riflessione di (V, B).

(iii) Scrivere η come prodotto di simmetrie di (V, B).

Soluzione:

(i) Consideriamo $v_1 := e_1$ e osserviamo che $B(v_1, v_1) = 1$. Calcoliamo ora l'ortogonale di v_1:

$$W := \langle v_1 \rangle^\perp = \{\sum_{i=1}^3 x_i e_i : 0 = B(e_1, \sum_{i=1}^3 x_i e_i) = x_1 - x_2 + x_3\} = \langle w_1 := e_1 + e_2, w_2 := e_2 + e_3 \rangle.$$

La matrice di $B_{|W}$ rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ è uguale a

$$M_{\{w_1, w_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Poniamo $v_2 := w_1 = e_1 + e_2$ e osserviamo che $B(v_2, v_2) = 1$. L'ortogonale di $\langle w_1 \rangle \subset W$ è uguale a

$$U := \langle w_1 \rangle^\perp = \{y_1 w_1 + y_2 w_2 \ : \ 0 = B(w_1, y_1 w_1 + y_2 w_2) = y_1 + 2y_2\} = \langle -2w_1 + w_2 \rangle,$$

e abbiamo che $B(-2w_1 + w_2, -2w_1 + w_2) = -1$. Dunque se poniamo $v_3 = -2w_1 + w_2 = -2e_1 - e_2 + e_3$, allora $\mathcal{F} := \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale rispetto a cui la matrice di B è in forma canonica di Sylvester

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) La trasformazione $-\operatorname{id}_V$ è un isometria di (V, B) dato che è invertibile e

$$B((-\operatorname{id}_V)(x), (-\operatorname{id}_V)(y)) = B(-x, -y) = B(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in V.$$

Inoltre

$$\det(-\operatorname{id}_V) = \det M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(-\operatorname{id}_V) = \det(-I_3) = -1,$$

e dunque $-\operatorname{id}_V \in O^-(V, B)$.

(iii) La matrice di $-\operatorname{id}_V$ rispetto ad una qualsiasi base di V, per esempio la base $\mathcal{F}$ trovata di (i), è uguale a $-I_3$. Siccome $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base diagonalizzante, allora la simmetria σ_{v_i} ha come matrice rispetto alla base $\mathcal{F}$ la matrice diagonale che ha -1 nell'entrata (i, i) e 1 nelle entrate (j, j) per ogni $j \neq i$. Dunque, deduciamo che $-\operatorname{id}_V = \sigma_{v_1} \circ \sigma_{v_2} \circ \sigma_{v_3}$.

ESERCIZIO 5

Sia $V = \mathbb{F}_5^3 = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si consideri la forma bilineare simmetrica

$$B\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + \overline{2} x_2 y_2 - x_3 y_1 - x_1 y_3 + \overline{4} x_3 y_3.$$

(i) Dimostrare che B è non-degenere e calcolare il discriminante di B.

(ii) Ridurre B a forma canonica.

(iii) Trovare un sottospazio totalmente degenere massimale di (V, B).

(iv) Trovare un sottospazio iperbolico massimale di (V, B).

(v) Determinare una decomposizione anisotropica di (V, B).

Soluzione:

(i) Per semplicità, denoteremo gli elementi di $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ con $\{0,1,2,3,4\}$. La matrice di B rispetto alla base canonica è

$$M_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Facendo lo sviluppo di Laplace lungo l'ultima riga, si ottiene

$$\det M_{\mathcal{E}}(B) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -2 + 4 = 2.$$

Dunque B è non-degenere e $\operatorname{disc}(B) = [2] \in \mathbb{F}_5^*/(\mathbb{F}_5^*)^2$, cioè un non-quadrato.

(ii) Consideriamo $v_1 := e_1$ e osserviamo che $B(v_1, v_1) = 1$. Calcoliamo ora l'ortogonale di v_1:

$$W := \langle v_1 \rangle^\perp = \{\sum_{i=1}^3 x_i e_i : 0 = B(e_1, \sum_{i=1}^3 x_i e_i) = x_1 - x_2 - x_3\} = \langle w_1 := e_1 + e_2, w_2 := e_1 + e_3 \rangle.$$

La matrice di $B_{|W}$ rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ è uguale a

$$M_{\{w_1,w_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Poniamo $v_2 := w_1 = e_1 + e_2$ e osserviamo che $B(v_2, v_2) = 1$. L'ortogonale di $\langle w_1 \rangle \subset W$ è uguale a

$$U := \langle w_1 \rangle^\perp = \{y_1 w_1 + y_2 w_2 \ : \ 0 = B(w_1, y_1 w_1 + y_2 w_2) = y_1 - 2y_2\} = \langle w_1 + w_2 \rangle,$$

e abbiamo che $B(w_1 + w_2, w_1 + w_2) = 2$. Dunque se poniamo $v_3 = w_1 + w_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$, allora $\mathcal{F} := \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale rispetto a cui la matrice di B è in forma canonica

$$M_{\mathcal{F}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

(iii) Dalla teoria sappiamo che l'indice di Witt di B soddisfa $w(B) \leq \dim V/2 = 3/2$, e dunque la dimensione dei sottospazi totalmente degeneri massimali è zero o uno. Usando la base $\mathcal{F}$ trovata in (ii), i vettori isotropi di (V, B) sono gli elementi di

$$\mathcal{C} := \left\{ \sum_{i=1}^3 y_i v_i \ : \ 0 = B\left(\sum_{i=1}^3 y_i v_i, \sum_{i=1}^3 y_i v_i \right) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 \right\}.$$

Per esempio, $u := 2v_1 + v_2 = 3e_1 + e_2$ è un vettore isotropo non nullo, che genera quindi il sottospazio totalmente degenere massimale $U := \langle u \rangle$.

(iv) Dalla teoria sappiamo che un sottospazio iperbolico massimale si può ottenere prendendo un'estensione iperbolica $\overline{U}$ del sottospazio totalmente degenere $U = \langle u = 2v_1 + v_2 \rangle$ trovato in (iii). Siccome $U = \operatorname{rad}(B_{|U})$ perché U è totalmente degenere, allora una tale estensione iperbolica sarà uguale a $\overline{U} = \langle u, v \rangle$ dove v è un vettore di V tale che $\{u, v\}$ formano una coppia iperbolica. Esplicitamente, il vettore

$v = \sum_{i=1}^3 y_i v_i$ deve soddisfare le seguenti due condizioni

$$\begin{cases} 0 = B\left(\sum_{i=1}^3 y_i v_i, \sum_{i=1}^3 y_i v_i\right) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2, \\ 1 = B(u,v) = B(2v_1 + v_2, \sum_{i=1}^3 y_i v_i) = 2y_1 + y_2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_2 = 3y_1 + 1, \\ y_1 + 1 + 2y_3^2 = 0. \end{cases}$$

Per esempio possiamo scegliere $v = -v_1 - 2v_2$. Un sottospazio iperbolico massimale di (V, B) sarà dunque

$$H = \overline{U} = \langle u, v \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

(v) Dalla teoria generale, usando che B è non-degenere, sappiamo che una decomposizione anisotropica di V sarè uguale a

$$V = \mathcal{H} \oplus^{\perp} \mathcal{A},$$

con $\mathcal{H}$ un sottospazio iperbolico massimale di (V, B) e $\mathcal{A} = \mathcal{H}^{\perp}$. Usando il punto (iv), possiamo scegliere

$$\mathcal{H} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Siccome $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale, si avrà che

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}^{\perp} = \langle v_3 \rangle \quad \text{con} \quad B(v_3, v_3) = 2.$$