SOLUZIONI DELLA SECONDA PROVA IN ITINERE DI GE210
16 GENNAIO 2018

NOTA: Gli esercizi 2 e 5 si sono rivelati più difficili del previsto: l'esercizio 5 perché abbastanza lungo, mentre l'esercizio 2 perché bisognava avere la convinzione di dimostrare che le parti (iii) e (iv) erano sbagliate. Per questa ragione ho deciso di aumentare il punteggio di questi Esercizi: alll'Esercizio 2 sono stati dati 14 punti, mentre all'Esercizio 5 sono stati dati 15 punti.

Per ciascun esercizio, ho anche indicato la suddivisione interna del punteggio rispetto alle diverse parti.

ESERCIZIO 1(6 punti)

Sia $V = \mathbb{C}^3$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e considerare la seguente forma Hermitiana

$$H\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = 3x_1\overline{y_1} - 2x_1\overline{y_2} + (1+3i)x_1\overline{y_3} - 2x_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} - (1+2i)x_2\overline{y_3} +$$

$$+(1-3i)x_3\overline{y_1} - (1-2i)x_3\overline{y_2} + 4x_3\overline{y_3}.$$

Trovare una base di V rispetto a cui H abbia la forma canonica.

Nota bene: H è una *forma* Hermitiana e non un *operatore* Hermitiano (rispetto ad un non meglio specificato prodotto scalare...)!!

Soluzione:

Procediamo col metodo dei complementi ortogonali. Sia $v_1 := e_1 + e_2$ e osserviamo che $H(v_1, v_1) = 1$. L'ortogonale di v_1 rispetto a H è uguale a:

$$v_1^{\perp} = \left\{ \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \; : \; \overline{x_1} + i\overline{x_3} = 0 \right\}.$$

Scegliamo $v_2 := -e_1 + ie_3 \in v_1^{\perp}$ e osserviamo che $H(v_2, v_2) = 1$. L'ortogonale di $\langle v_1, v_2\rangle$ è uguale a:

$$\langle v_1, v_2\rangle^{\perp} = \langle ie_1 + e_2 + e_3\rangle.$$

Poniamo $v_3 := ie_1 + e_2 + e_3$ e osserviamo che $H(v_3, v_3) = -1$. Dunque rispetto alla base $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$, la forma Hermitiana è in forma canonica e abbiamo che

$$M_{\mathcal{F}}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2(14 punti)

Sia $V = \mathbb{C}^2$ con base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$. Si consideri la forma sesquilineare H su V definita da

$$H\left(\sum_{i=1}^{2} x_i e_i, \sum_{j=1}^{2} y_j e_j\right) = 5x_1\overline{y_1} - 3ix_1\overline{y_2} + 3ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}.$$

e l'operatore T su V definito da

$$T(x_1e_1 + x_2e_2) = (4x_1 + 2x_2)e_1 + \frac{(6-i)x_1 + (6+i)x_2}{2} e_2.$$

(i) (3 punti) Dimostrare che H è un prodotto scalare su V.
(ii) (3 punti) Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica $\mathcal{E}$, trovare una base ortonormale $\mathcal{F}$ di V rispetto al prodotto scalare H.
(iii) (4 punti) Dimostrare che T è un operatore normale di (V, H).
(iv) (4 punti) Trovare una base ortonormale di (V, H) rispetto a cui T sia diagonale.

Soluzione:

(i) Chiaramente H è una forma Hermitiana. Per verificare che è un prodotto scalare, basta verificare che la matrice di H rispetto alla base canonica

$$M_{\mathcal{E}}(H) = \begin{pmatrix} 5 & -3i \\ 3i & 2 \end{pmatrix}$$

è definita positiva. Il determinante di $M_{\mathcal{E}}(H)$ è uguale a

$$\det M_{\mathcal{E}}(H) = 10 - (3i)^2 = 1 > 0.$$

Dunque la forma canonica di H può essere uguale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque o H è un prodotto scalare oppure $-H$ è un prodotto scalare. Siccome le entrate sulle diagonali sono positive, questo basta per concludere che H è un prodotto scalare.

(ii) Applicando il procedimento di Gram-Schmidt trovo prima una base ortogonale:

$$\begin{cases} f_1' := e_1, \\ f_2' = e_2 - \dfrac{H(e_1, e_1)}{H(e_1, e_1)} e_1 = e_2 - \dfrac{3i}{5} e_1. \end{cases}$$

Normalizzando, ottengo la base ortonomale

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{e_1}{\sqrt{5}}, \\ f_2 = \sqrt{5} e_2 - \dfrac{3i}{\sqrt{5}} e_1. \end{cases}$$

(iii) Questo è falso (!): T non è normale, e questo segue dal punto successivo.
(iv) Questo non è possibile (!) e si dimostra cosi.

Il polinomio caratteristico di T è uguale a

$$P_T(\lambda) = \lambda^2 - \frac{14 + i}{2} \lambda + (6 + 3i).$$

Gli autovalori di T sono

$$\lambda_1 = 6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 + \frac{i}{2}.$$

Gli autospazi rispetto a tali autovalori sono

$$\begin{cases} E_6(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ E_{1+\frac{i}{2}}(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ i - 6 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{cases}$$

Ora si calcola che

$$H\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ i - 6 \end{pmatrix} \right) = 26 + 38i.$$

Dunque siccome gli autospazi relativi ai due autovalori non sono ortogonali rispetto ad H, non può esistere una base ortonormale di $(\mathbb{C}^2, H)$ rispetto a cui T sia diagonale.

ESERCIZIO 3(10 punti)

Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ formato dai polinomi in una variabile x a coefficienti in $\mathbb{R}$ e di grado al più 2.

(i) (2 punti) Sia

$$\langle -, - \rangle : V \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(p(x), q(x)) \mapsto \langle p(x), q(x) \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Dimostrare che $\langle -, - \rangle$ è un prodotto scalare su V.

(ii) (2 punti) Applicando il procedimento di Gramm-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$, trovare una base ortonormale di V rispetto al prodotto scalare $\langle -, - \rangle$.

(iii) (3 punti) Si consideri l'operatore

$$D : V \longrightarrow V$$
$$p(x) \mapsto p'(x).$$

Trovare una decomposizione polare di D.

(iv) (3 punti) Si dica se la decomposizione polare trovata nel punto precedente è unica e, nel caso in cui non lo fosse, trovare tutte le decomposizioni polari di D.

Soluzione:

(i) La bilinearità di $\langle -, - \rangle$ segue dalla linearità dell'integrale, la simmetria è ovvia, e il fatto che $\langle -, - \rangle$ è definito positivo segue dal fatto che l'integrale di una funzione continua non-negativa su $[0, 1]$ è nullo se e solo se la funzione è nulla.

(ii) Applicando il procedimento di Gram-Schmidt, trovo prima una base ortgonale:

$$\begin{cases} f_1' = 1, \\ f_2' = x - \dfrac{1}{2}, \\ f_3' = x^2 - x + \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Normalizzando, ottengo la base ortonormale

$$\begin{cases} f_1 = 1, \\ f_2 = \sqrt{3}(2x - 1), \\ f_3 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1). \end{cases}$$

(iii) Cerchiamo una decomposizione polare della forma

$$D = Q \cdot P$$

con Q isometria e P definito semipositivo.

Dalla teoria, sappiamo che P è unico ed è uguale a $P = \sqrt{D^a \cdot D}$. Rispetto alla base ortonormale $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ trovata nel punto precedente, la matrice di D è uguale a

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(D) = 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque possiamo calcolare la matrice di P rispetto a $\mathcal{F}$ come segue:

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(P) = \sqrt{M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(D)^a \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(D)} = \sqrt{12\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} = 2\sqrt{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Sempre dalla teoria, sappiamo che l'unica condizione che deve soddisfarre l'isometria Q è che deve valere $Q(P(v)) = D(v)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ (o equivalentemente per una base di $\mathbb{R}^3$). Imponendo questa condizione per $v = f_2$ e $v = f_3$ (mentre per $v = f_1$ la condizione è automaticamente soddisfatta perché $P(f_1) = 0 = D(f_1)$), otteniamo che

$$\begin{cases} Q(2\sqrt{3}f_2) = Q(P(f_2)) = D(f_2) = 2\sqrt{3}f_1 \Rightarrow Q(f_2) = f_1, \\ Q(2\sqrt{15}f_3) = Q(P(f_3)) = D(f_3) = 2\sqrt{15}f_2 \Rightarrow Q(f_3) = f_2. \end{cases}$$

Imponendo che $Q(f_1) = f_3$, otteniamo che Q è un isometria che soddisfa $D = Q \cdot P$.

(iv) La decomposizione polare di D non è unica in quanto D non è invertibile. Dalla discussione del punto precedente, sappiamo che P è unico e uguale a $P = \sqrt{D^a \cdot D}$, mentre Q può essere una qualunque isometria tale che $Q(f_2) = f_1$ e $Q(f_3) = f_2$. Cerchiamo tutte le isometria di questo tipo. Scriviamo la matrice di Q rispetto a $\mathcal{F}$:

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(Q) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che tale matrice è ortogonale (che equivale al fatto che Q è un isometria) se e solo se $\alpha = \beta = 0$ e $\gamma = \pm 1$. Dunque ci sono due possibili decomposizione polari $D = Q \cdot P$, con P data da (0.1) e le due isometrie Q date da

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4(6 punti)

Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_K$ (con K campo arbitrario), si considerino le due collezioni seguenti di 4 punti:

$$\mathcal{A} := \{p_0 = [0,1,0], p_1 = [0,0,1], p_2 = [1,0,0], p_3 = [1,-1,2]\},$$
$$\mathcal{B} := \{q_0 = [0,1,0], q_1 = [0,0,1], q_2 = [1,0,0], q_3 = [1,-1,0]\}.$$

(i) (3 punti) Dire se i punti in $\mathcal{A}$ (rispettivamente, in $\mathcal{B}$) sono in posizione generale.

(ii) (3 punti) Trovare tutte le proiettività di $\mathbb{P}^2_K$ (qualora esistano) che mandano i quattro punti ordinati

$$\{e_0 = [1,0,0], e_1 = [0,1,0], e_2 = [0,0,1], e_3 = [1,1,1]\}$$

nei quattro punti ordinati di $\mathcal{A}$ (rispettivamente, di $\mathcal{B}$).

Soluzione:

(i) Una collezione di pinti in $\mathbb{P}^2$ è in posizione generale se i punti sono a due a due distinti e a tre a tre non collineari.

La collezione $\mathcal{B}$ non è in posizione generale poiché la retta $\{x_2 = 0\}$ contiene i punti q_0, q_2 e q_3.

La collezione $\mathcal{A}$ è in posizione generale siccome i punti sono a due a due distinti e a tre a tre distinti. Quest'ultima proprietà può essere vista cosi. Dati due indici

$i \neq j \in \{0,1,2\}$, l'unica retta che contiene i punti p_i e p_j è la retta di equazioni $\{x_k = 0\}$ dove $k := \{0,1,2\} \setminus \{i,j\}$. Ma tale retta non contiene il punto p_3.

(ii) Siccome i punti $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ sono i punti fondamentali di un sistema di riferimento proiettivo, allora non esiste nessuna proiettività di $\mathbb{P}^2$ che manda tali punti in $\mathcal{B}$ mentre esiste ed è unica una proiettività di $\mathbb{P}^2$ che li manda nei punti di $\mathcal{A}$.

Tale proiettività sarà della forma

$$\phi_A([x_0, x_1, x_2]) = ([A] \cdot [x_0, x_1, x_2]^t)^t,$$

con $[A] \in \mathrm{PGL}_3(K)$. Imponendo che $\phi_A(e_i) = p_i$ per $i = 0,1,2$, troviamo che la matrice A deve essere della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

per certi valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K^*$. La condizione $\phi_A(e_3) = p_3$ equivale a

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

per qualche $\mu \in K^*$. Dunque otteniamo che l'elemento cercato $[A] \in \mathrm{PGL}_3(K)$ è uguale a

$$[A] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

ESERCIZIO 5(15 punti)

Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su un campo K sia $P : V \to V$ un'applicazione lineare idempotente, cioé tale che $P^2 = P$.

(i) (3 punti) Dimostrare che $1 - P$ è idempotente e $\ker P = \mathrm{Im}(1-P)$ e $\mathrm{Im}\, P = \ker(1-P)$, dove $1 = \mathrm{id}_V$.

(ii) (3 punti) Dimostrare che $V = \ker P \oplus \mathrm{Im}\, P$.

(iii) (9 punti) Supponiamo ora che $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e sia $\langle -, - \rangle$ un prodotto scalare su V. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) P è la proiezione ortogonale su $\mathrm{Im}\, P$.
(b) P è una proiezione ortogonale.
(c) $\ker P$ è ortogonale a $\mathrm{Im}\, P$.
(d) $||P(v)|| \leq ||v||$ per ogni $v \in V$.
(e) P è semipositivo.
(f) P è autoaggiunto.
(g) P è normale.

Soluzione:

(i) L'operatore $1 - P$ è idempotente in quanto

$$(1-P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - 2P + P = 1 - P.$$

Dimostriamo che $\mathrm{Im}\, P = \ker(1-P)$, l'altra uguaglianza si ottiene scambiando i ruoli di P e $1 - P$. Se $x = Py \in \mathrm{Im}(P)$ allora

$$(1-P)(x) = (1-P)(Py) = P(y) - P^2(y) = P(y) - P(y) = 0,$$

e dunque otteniamo l'inclusione $\operatorname{Im} P \subseteq \ker(1-P)$. Se invece $x \in \ker(1-p)$ allora $0 = (1-P)(x) = x - P(x)$ o equivalentemente $x = P(x) \in \operatorname{Im} P$, e dunque otteniamo l'inclusione $\operatorname{Im} P \supseteq \ker(1-P)$.

(ii) Ogni elemento $x \in V$ si scrive come

$$x = P(x) + (1-P)(x), \tag{0.2}$$

e l'elemento $(1-P)(x)$ appartiene a $\ker P$ per quanto mostrato nel punto precedente. Questo mostra che $V = \operatorname{Im} P + \ker P$.

Per mostrare che si tratta di una somma diretta, dobbiamo mostrare che la decomposizione (0.2) è unica. Supponiamo di avere una decomposizione della forma

$$x = P(y) + z \quad \text{ con } z \in \ker P.$$

Allora abbiamo che $P(x) = P(P(y)) + P(z) = P(y)$ e per differenza $z = x - P(y) = x - P(x) = (1-P)(x)$. Dunque la decomposizione (0.2) è unica.

(iii) Dimostreremo le implicazioni seguenti.

- $(a) \Rightarrow (b)$: ovvio.
- $(b) \Rightarrow (a)$: supponiamo che esista una decomposizione ortogonale $V = W_1 \oplus W_2$ e che P sia la proiezione ortogonale su W_1. Allora chiaramente $W_1 = \operatorname{Im} P$, e dunque P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.
- $(c) \Rightarrow (a)$: per ipotesi e usando il punto (ii) dell'Esercizio, abbiamo che

  $$V = \ker P \oplus^{\perp} \operatorname{Im} P.$$

  Inoltre, se consideriamo la decomposizione di un elemento di V come

  $$v = z + P(y) \quad \text{ con } z \in \ker P,$$

  allora abbiamo che

  $$P(v) = P(z) + P(P(y)) = 0 + P(y) = P(y),$$

  e dunque P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$.
- $(a) \Rightarrow (c)$: Sia $x \in \ker P$. Scriviamo $x = y + z$ con $y \in \operatorname{Im} P$ e $z \in (\operatorname{Im} P)^{\perp}$. Allora $P(x) = y$ perché P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$ ma anche $P(x) = 0$ perché $x \in \ker P$. Allora deduciamo che $x = z \in (\operatorname{Im} P)^{\perp}$.
- $(a) \Rightarrow (d)$: per ogni $x \in V$, scriviamo $x = y + z$ con $y \in \operatorname{Im} P$ e $z \in (\operatorname{Im} P)^{\perp}$. Allora, usando che y e z sono ortogonali e che $P(x) = y$ per definizione di proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} P$, abbiamo che

  $$||x|| = ||y|| + ||z|| \geq ||y|| = ||P(x)||.$$

- $(d) \Rightarrow (c)$: per ogni $x \in V$, possiamo scrivere (per il punto (ii)) in maniera unica $x = y + z$ con $y \in \operatorname{Im} P$ e $z \in \ker P$. L'ipotesi (d) implica che per ogni $y \in \operatorname{Im} P$ e $z \in \ker P$ abbiamo:

  $$||P(x)||^2 = ||y||^2 \leq ||x||^2 = ||y||^2 + 2\operatorname{Re}\langle y, z\rangle + ||z||^2 \Rightarrow 2\operatorname{Re}\langle y, z\rangle + ||z||^2 \geq 0. \tag{0.3}$$

  Supponiamo ora per assurdo che $\operatorname{Im} P$ non sia ortogonale a $\ker P$, e che dunque esistano $y_0 \in \operatorname{Im} P$ e $z_0 \in \ker P$ tale che $\langle y_0, z_0\rangle \neq 0$. A meno di moltiplicare y_0 per uno scalare di K, posso fare in modo che $\langle y_0, z_0\rangle \in \mathbb{R}_{<0}$. Ora la disuguaglianza (0.3) implica che per ogni $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ ho che

  $$2\mu\langle y_0, z_0\rangle + ||z_0||^2 = 2\langle \mu y_0, z_0\rangle + ||z_0||^2 \geq 0$$

  Ma questo è assurdo in quanto il membro a sinistra diventa arbitrariamente negativo al tendere di μ all'infinito (perché $\langle y_0, z_0\rangle \in \mathbb{R}_{<0}$).

- $(a) \Rightarrow (e)$: per ogni $x_1, x_2 \in V$, scriviamo $x_i = y_i + z_i$ con $y_i \in \operatorname{Im} P$ e $z_i \in (\operatorname{Im} P)^\perp$ (per $i = 1, 2$). Abbiamo che

  $$\langle P(x_1), x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle = \langle x_1, P(x_2) \rangle,$$

  da cui deduciamo che $P = P^a$. Inoltre

  $$\langle P(x_1), x_1 \rangle = \langle y_1, y_1 + z_1 \rangle = \langle y_1, y_1 \rangle \geq 0 \quad \text{(per le proprietà del prodotto scalare)},$$

  da cui deduciamo che P è semipositivo.
- $(e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g)$: ovvio.
- $(g) \Rightarrow (c)$: osserviamo che $\ker P$ è l'autospazio di P relativo all'autovalore 0, mentre per il punto (ii) $\operatorname{Im} P = \ker(1 - P)$ è l'autospazio di P relativo all'autovalore 1. Dunque se P è normale, allora i suoi autospazi relativi ad autovalori diversi sono ortogonali, e dunque segue che $\ker P$ è ortogonale a $\operatorname{Im} P$.