Tutorato1 GE210

Docente: Filippo Viviani. Esercitatore: Valerio Talamanca.
Tutori: Gaudenzio Falcone, Giovanni Passeri.
Lunedì 16 ottobre 2017.

Esercizio 1. *Siano U, W sottospazi vettoriali di V. Mostrare che*

1. $U \subseteq W \implies W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$
2. $U \subseteq U^{\perp\perp}$
3. $U^{\perp} = U^{\perp\perp\perp}$
4. $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$
5. $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$

Esercizio 2. *Sia K un campo e V un K-spazio vettoriale. Sia poi*

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

dire, al variare di K,V ed f se f è una forma bilineare, se è simmetrica, antisimmetrica o alterna e, quand'è possibile, calcolarne la matrice associata.

1. $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$ *ed*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := x_1y_1 + ix_2y_2 - x_3y_3 + \sqrt{i}x_1y_2$$

2. K *qualsiasi* $V = K^n$,

$$f((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) := \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\right)$$

3. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$,

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) := \sum_{k=1}^{4} x_k^2 y_k^2$$

4. $K = \mathbb{R}$, $V = Span(cosx, sinx)$ *(i.e.: il sottospazio vettoriale di $C([0, 2\pi])$ generato da $cosx$ e $sinx$)*

$$f(v(x), w(x)) := \int_0^{2\pi} v(t)w(t)dt$$

5. $K = \mathbb{C}$, $V = M_2(\mathbb{C})$,

$$f(A, B) := det(AB)$$

6. $K = \mathbb{F}_3$, $V = \mathbb{F}_3^n$

   $$f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := max\{(x_j^3 + 2x_j)(y_j^3 + 2y_j) : j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

   (dove il massimo è fatto rispetto all'ordine su $\mathbb{F}_3^n$ *"*$[0]_3 \leq [1]_3 \leq [2]_3$*")*

7. *K scelto S un K-spazio vettoriale qualsiasi di dimensione finita e* $V = S^*$. *Sia* $s \in S - \{0\}$,

$$f(\varphi, \psi) := \varphi(s)\psi(s)$$

8. *K qualsiasi* $V = K^2$

$$f((a, b,), (c, d)) := det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

9. $K = \mathbb{Q}$, $V = [\sqrt{-3}]$,

   $$f(x, y) := ixy - x + 3y$$

   (dove, ricordiamo, $[Q][\sqrt{-3}] = \{r + r'\sqrt{-3} : r, r' \in \mathbb{Q}\}$*)*

Esercizio 3. *Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *V è non singolare.*
2. $\forall x \in V < u, x >=< v, x > \implies u = v$

Esercizio 4. *Data l'applicazione* $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(x, y) := x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_3y_3$$

1. *Verificare che F è una forma bilineare*
2. *Stabilire se F è simmetrica*
3. *Scrivere la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica*
4. *Stabilire se F è non degenere*
5. *verificare che i sottospazi* $U := Span((1, 0, 0))$ *e* $W := Span(0, 0, 1))$ *sono ortogonali rispetto alla forma F*

Esercizio 5. *Data la seguente matrice*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Scrivere la forma bilineare G definita dalla matrice A.*
2. *Stabilire se G è non singolare e trovare due vettori non nulli $u, u' \in \mathbb{R}^4$ tali che $G(u, y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^4$ e $G(x, u') = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$*
3. *scrivere la matrice A rispetto alla base $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ dove*

$$b_1 := e_1, b_2 := -e_1 + e_4, b_3 := e_1 + e_2, b_4 := e_3$$

Esercizio 6. *Sia $V := M_2(\mathbb{R}$. Si consideri la matrice*

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e la mappa $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(A, B) := tr({}^tAMB)$$

1. *Mostrare che f è una forma bilineare.*
2. *Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$*

Esercizio 7. *Sia B una forma bilineare su uno spazio vettoriale di dimensione n. Mostrare che esistono basi per V, $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tali che la matrice che calcola B, rispetto ad esse appare*

$$B(u_j, v_k) = diag\{1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$$