GE210 - Geometria 2: Tutorato 2

Docente: Filippo Viviani
Tutori: Gaudenzio Falcone, Giovanni Passeri
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

23 Ottobre 2017

Esercizio .1. *Considerare le seguenti forme bilineari. Dire quali di esse sono alterne e, qualora lo siano, calcolare la base simplettica:*

(a)

$$f : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$

$$(x, \underline{y}) \mapsto x_1 y_4 - x_4 y_1$$

(b)

$$f : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

(c) Sia p un primo, $p \geq 3$

$$f : \mathbb{F}_p^n \times \mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \sum_{k=1}^{p-1} [k x_k + (p-k) y_k]$$

(d) Sia $V = Span(\cos x, \sin x)$ *considerato come* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale,*

$$f : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(v(x), w(x)) \mapsto \int_0^{2\pi} v(t) w(t + \frac{\pi}{2}) dt$$

(d) Sia K un campo con caratteristica diversa da 2. Definiamo

$$K(X) := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \,\middle|\, f, g \in K[x],\ g \neq 0 \right\}$$

allora la struttura $(K(X), +, \cdot)$ *è un campo. Indichiamo con*

$$K(X)_{\leq j} := \{ f \in K(X)[T] \mid deg(f) \leq j \}$$

e consideriamo la forma bilineare

$$b : K(X)_{\leq 3} \times K(X)_{\leq 3} \to K(X)$$

$$(a_0+a_1T+a_2T^2+a_3T^3, b_0+b_1T+b_2T^2+b_3T^3) \mapsto a_0b_3-a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1$$

Esercizio .2. *Dire se le seguenti coppie* (V, b) *sono spazi vettoriali simplettici. Se lo sono trovare esplicitamente la scomposizione di essi come somma diretta del loro radicale e di piani iperbolici simplettici:*

(a) *Considerare* $V = \mathbb{C}^4$ *e* b *come la forma bilineare definita al punto (a) dell'esercizio precedente.*

(b) *Considerare* $V = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid degf \leq 4\}$ *e*

$$b : V \times V \to \mathbb{Q}$$

$$(\sum_{i=0}^{4} a_i x^i, \sum_{j=0}^{4} b_j x^j) \mapsto a_1b_2 + a_0b_3 - b_0a_3 - b_1a_2$$

(c) *Considerare* $V = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid degf \leq 5\}$ *e*

$$b : V \times V \to \mathbb{Q}$$

$$(\sum_{i=0}^{5} a_i x^i, \sum_{j=0}^{5} b_j x^j) \mapsto a_1b_2 + a_0b_3 - b_0a_3 - b_1a_2$$

(d) *Considerare* $V = Span(\cos(nx), \sin(nx) \,|n \in \mathbb{N})$. *Per questioni di notazione scriviamo* $e_n^1 = \cos nx$ *e* $e_n^2 = \sin(nx)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *e consideriamo la forma bilineare data da*

$$b(e_n^i, e_m^j) = \int_0 2\pi e_n^i(t) e_{m+1}^j(t) dt$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\forall i, j \in \{1, 2\}$.

Esercizio .3. *Sia* V *un* K*-spazio vettoriale di dimensione finita e con caratteristica di* K *diversa da 2. Sia* $b : V \times V \to K$ *una forma bilineare simmetrica. Provare che la mappa*

$$q : V \to K$$

$$x \mapsto \frac{b(x, x)}{2}$$

è una forma quadratica.

Esercizio .4. *Sia q una forma quadratica sullo spazio vettoriale V. Provare che per essa vale la 'regola del parallelogramma' ossia $\forall x, y \in V$*

$$q(x+y) + q(x-y) = 2[q(x) + q(y)].$$

Esercizio .5. *Diagonalizzare, se possibile, le seguenti forme bilineari:*

(a)

$$f : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$
$$(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto 2x_1y_1 + ix_2y_2 - y_1x_3 + \sqrt{i}x_3y_3$$

(b)

$$f : \mathbb{F}_7^4 \times \mathbb{F}_7^4 \to \mathbb{F}_7$$

con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 19 & 1 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 23 & 15 \end{pmatrix}$$

(c) Sia $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid degf \leq 3\}$ e

$$f : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(g, h) \mapsto \int_0^1 g(t)h(t)dt$$

Esercizio .6. *Diagonalizzare, quando è possibile, la forma bilineare indotta su $\mathbb{F}_p^3$ dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -k & -1 \\ -k & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{F}_p$ per i valori di $p = 7, 2, 3,$.*