Tutorato1 GE210

Docente: Filippo Viviani. Esercitatore: Valerio Talamanca.
Tutori: Gaudenzio Falcone, Giovanni Passeri.
Venerdì 3 novembre 2017.

Esercizio 1. *Sia K un campo e V un K-spazio vettoriale. Sia poi*

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Si dica se è una forma bilineare e se ammette una base diagonalizzante. Se così è diagonalizzarla.

1. $V = \mathbb{F}_3^4$ *ed* f *è definita dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $V = Span(e^x, cosx, sinx)$,

$$f(v(x), w(x)) = \int_0^{2\pi} v(s)w(s)ds$$

3. $V = \mathbb{C}$ *ed* f *definita da*

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{-3} & i \\ 2 & i & 0 \end{pmatrix}$$

4. $V = \mathbb{Q}[i]$ *(come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale),*

$$f(x, y) = xy$$

5. $V = \{g \in \mathbb{C}[X] : degf < 3\}$,

$$f(g, h) = f(0)g(0)$$

6. $V = \mathbb{R}^4$,

$$b((x, y, z), (u, v, w)) = 3xu + xv + wz + yu + 5yv$$

7. $V = \mathbb{R}^2$

$$f(v, w) :=< v, r(w) >$$

dove $r(w)$ è la rotazione di w di $\pi/3$

8. $V = \mathbb{F}_3$,

$$f((x,y,z),(x',y',z')) = x^3x'^3 + y^3y'^3 + z^3z'^3$$

Esercizio 2. *Si consideri la famiglia di funzioni*

$$b_k : V \times V \to, (p,q) \mapsto p(f)q(k)$$

dove $V := \mathbb{R}_{<3}[X]$

1. *Per quali valori di* k*,* b *è una forma bilineare simmetrica?*
2. *Per i valori per cui è una forma bilineare simmetrica esibirne la forma quadratica associata e scriverne la matrice rispetto alla base* $\{1, X, X^2\}$
3. *Per quali valori, detta* M_{b_k} *la matrice associata a* b_k *rispetto ad una base a piacere fissata,* $M_{b_k} \in SO(3)$*?*
4. *Consideriamo* b_k *ristretta a* $W := Span(1,X)$*. Ripetere il punto precedente. Cosa si può dire sugli autovalori di* b_k *ristretta a* W*?*

Esercizio 3. *Scrivere esplicitamente le seguenti trasformazioni nello spazio affine* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

1. *per* $n = 3$*, scrivere la simmetria rispetto alla retta di equazioni cartesiane*
$$\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$
2. *In* $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$*, simmetria rispetto alla retta*
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - w = 0 \\ x + iy \end{cases}$$
3. *Simmetria rispetto al vettore* $v := 2cosx + \sqrt{3}sinx$ *nel solito spazio vettoriale reale (che so adorate)* $V = Span(cosx, sinx)$*, rispetto alla forma bilineare* b *data da*
$$b(v,w) := \int_0^{2\pi} v(s)w(s)ds$$
4. *(Bonus) In* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*, rotazione di* $\pi/3$ *attorno al punto* $P(1,0)$ *per* $n = 2$

Esercizio 4. *(Curiosità)*

Dato un insieme X *ed un gruppo* g*, un'applicazione*

$$G \times X \to X, (g,x) \mapsto g * x$$

si dice "Azione di Gruppo su X" se e solo se: (i) $\forall x \in X, 1 * x = x$ *(ii)* $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X (g_1g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$.

1. *Mostrare che*
$$G := \{\rho_{\frac{2k\pi}{6}} | k \in \mathbb{Z}\}$$
(dove $\forall \theta \in \mathbb{R}$ *indichiamo con* ρ_θ *la rotazione di* θ *in senso antiorario attorno all'origine, in* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*) è un sottogruppo ciclico di* $O(\mathbb{R}^2, \bullet)$

2. *Mostrare che* G *induce naturalmente un'azione di gruppo su* $\mathbb{R}^2$

3. *Data un'azione di gruppo definita come poco fa, si dice, dato* $x \in X$ *"Orbita di* x*" l'insieme*
$$Orb(x) := \{y \in X | \exists g \in G tale che g * x = y\}$$
Calcolare e rappresentare graficamente $Orb(P)$ *dove* $P(1,0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*. Che cardinalità ha?*

4. *Quale noto gruppo si ottiene considerando il gruppo generato da* G *e da una simmetria di* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*, fatta rispetto ad una delle rette passanti per* O *e per un punto di* $Orb(P)$*?*

Esercizio 5. *(Rotazioni i* $\mathbb{R}^3$*)*

1. *Seguendo i seguenti passi mostrare che*
$$\forall R \in SO(3) - \{I_3\}$$
R ammette 1 come autovalore con autospazio di dimensione 1:

   (a) *Mostrare che* R *ammette almeno un autovalore reale*

   (b) *(*) Dando per buono che per una proposizione tale autovalore è* 1 *o* -1 *mostrare che tale autovalore è proprio* 1*. (Sugg.: mostrare che* $\forall x \in \mathbb{R}^3, R(x^\perp) = x^\perp$*)*

2. *Mostrare che* R *fissa una retta per l'origine.*

3. *Mostrare seguendo i seguenti passi che esiste una corrispondenza biunivoca fra* $SO(3)$ *e* $S^2 \times (0, 2\pi)$*:*

   (a) *Notare che,* R *altro non è che una rotazione su un opportuno piano di* $\mathbb{R}^3$ *e che quindi di conseguenza determina univocamente un punto su* S^2 *ed uno scalare* $\theta \in [0, \pi]$

   (b) *Notare che, viceversa, il suddetto punto ed il suddetto scalare determinano univocamente una rotazione* $R \in SO(3)$

   (c) *Notare infinte che su* $S^2 \times (0, \pi)$ *questa è una corrispondenza biunivoca.*

4. *Mostrare infine che ogni rotazione di* $\mathbb{R}^3$ *è composizione di rotazioni attorno agli assi. Cioè mostrare che, dette* $\forall\theta \in \mathbb{R}$

$$X_\theta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

e

$$Z_\theta := \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall R \in SO(3)\ \exists\theta, \psi \in [0, \pi], \exists\phi \in [0, 2\pi]$ *tali che*

$$R = Z_\phi X_\theta Z_\psi$$