GE210 - Geometria 2: Tutorato 4

Docente: Filippo Viviani
Tutori: Gaudenzio Falcone, Giovanni Passeri
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

15 Novembre 2017

Esercizio .1. *Dimostrare che in uno spazio vettoriale euclideo* $(V, <,>)$ *si hanno le seguenti identità per ogni* $v, w \in V$*:*

(a) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

(b) $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4 < v, w >$

Esercizio .2. *Applicare il procedimento di Gram-Schmidt per costruire una base ortonormale a partire dalle seguenti basi su* $\mathbb{R}^3$ *(dotato del prodotto scalare standard):*

(a) $(1,1,1), (1,0,1), (3,2,3)$

(b) $(1,1,1), (-1,1,-1), (1,0,1)$

Applicare lo stesso procedimento dotando $\mathbb{R}^3$ *del seguente prodotto scalare:*

$$< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 + x_3y_3$$

(verificare prima che tale forma bilineare definisce effettivamente un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$*).*

Esercizio .3. *Dimostrare che i numeri complessi di modulo* 1 *costituiscono un sottogruppo del gruppo moltiplicativo* $\mathbb{C}^*$ *isomorfo a* $SO(2)$*.*

Esercizio .4. *Stabilire quali delle seguenti forme sono sesquilineari e calcolare la matrice associata rispetto alla base canonica. Dire inoltre se sono Hermitiane o anti-Hermitiane e, in caso affermativo, ricondurle alla forma canonica di Sylvester:*

(a) $<,>: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *tale che* $< x, y >= x_1\overline{y}_1 + ix_1\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_1$

(b) $<,>: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *tale che* $< x, y >= x_1\overline{y}_1 + 2ix_1\overline{y}_2 - 2ix_2\overline{y}_1$

(c) $<,>: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *tale che* $< x, y >= x_1\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$

(d) $<,>: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *tale che* $< x, y >= i|x_1||y_1|$

(e) $<,>: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *tale che* $< x, y >= 1 + x_1\overline{y}_1 + x_1\overline{y}_2$

(f) $<,>: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ *tale che* $< x, y >= x_1\overline{y}_2 - x_3\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_3$

(g) $<,>: \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ *tale che* $< x, y >= x_1^2 - 2x_3\overline{y}_2 + \overline{x}_4 y_3$

(h) $<,>: \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}$ *tale che* $< f, g >= \int_0^{2\pi} g(\gamma(s))\overline{h(\gamma(s))}ds$ *dove* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *è tale che* $s \mapsto \cos s + i \sin s = e^{is}$

(i) $<,>: \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ *tale che* $< x, y >= x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 + i\overline{x}_3 y_1 - \overline{x}_1 y_3$

Esercizio .5. *Usando il procedimento di Gram-Schmidt, ortonormalizzare la seguente base di* $\mathbb{C}^3$ *rispetto al prodotto Hermitiano standard:*

$$\mathcal{B} = \{(i, -i, 0), (0, i, 0), (0, i, i)\}$$