Tutorato5 GE210

Docente: Filippo Viviani. Esercitatore: Valerio Talamanca.
Tutori: Gaudenzio Falcone, Giovanni Passeri.
Mercoledì 22 novembre 2017.

Esercizio 1. *Dire quali fra i seguenti sono prodotti scalari e trovarne, quando lo sono, una base ortonormale con Gram-Schmidt.*

1. *su* $\mathbb{R}^3$,
$$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >:= 3x_1y_2 + x_3y_1 + \pi x_2y_2$$

2. *su* $\mathbb{C}^4$
$$< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) >:= \sum_{j=1}^{4} x_j \overline{y_{\sigma(j)}}$$
dove $\sigma := (132) \in S_4$

3. *su* $V := Span(\{2^{-n}\}_n, \{3^{-n}\}_n, \{5^{-n}\}_n)$,
$$< \{x_n\}_n, \{y_n\}_n >:= \sum_{n\geq 0} x_ny_n$$

4. *su* $\mathbb{C}_{\leq 3}[X]$,
$$< f, g >:= \int_0^1 f(s)\overline{g(s)}ds$$

5. *sullo stesso spazio vettoriale del punto precedente*
$$< f, g >:= f(1)g(1) >$$

6. *su* $V := Span(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ *dove*
$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
definite da $\gamma_1(s) := (coss, sins)$, $\gamma_2(s) := (sins, coss)$, $\gamma_3(s) := (coss, -sins)$, $\gamma_4(s) := (1 - 2coss + cos2s, 2sins - sin2s)$.
$$< v, w >:= \int_0^{2\pi} v(s) \cdot w(s)ds$$

Esercizio 2. *Trovare gli ortogonali a* W *rispetto ai seguenti prodotti interni.*

1. $W := Span(e_1 + 2e_3, e_4)$ *come sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$ *rispetto al prodotto scalare standard.*

2. $W := Span(ie_2 - e_4, e_3 - ie_1)$ *come sottospazio vettoriale di* $\mathbb{C}^4$ *rispetto al prodotto scalare standard.*

3. $W := Span(iX + 2, X^3 + 2\sqrt{7}) \subseteq \mathbb{C}_{\leq 4}[X]$ *rispetto al prodotto scalare definito nel punto 4 dell'esercizio precedente.*

4. *Stesso W rispetto però al prodotto scalare definito nel punto 5 dell'esercizio precedente.*

Esercizio 3. *Trovare le espansioni di Fourier dei seguenti vettori v rispetto ai sistemi ortonarmali O*

1. $v := (1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ *e* $O := \{e_1, e_2, e_3 - e_4, e_3 + e_4\}$ *rispetto al prodotto scalare standard.*

2. $v \in V := C([0, 2\pi]$ *rispetto al prodotto scalare su V definito da*

$$< f, g >:= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

rispetto al sistema ortonormale

$$O := \{\frac{1}{2\pi}\} \bigcup \{\frac{1}{\pi} cos(nx) : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\frac{1}{\pi} sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$$

3. $v := \{\frac{3^n+2^n}{6^n}\}_n$ *rispetto al prodotto scalare del punto 3 dell'esercizio 1, rispetto al sistema ortonormale*

$$O := \{\{\delta_1(n) + \delta_2(n)\}_n, \{\delta_3(n) + \delta_4(n)\}_n, \{\delta_5(n) + \delta_6(n)\}_n\}$$

dove $\forall n, k \in \mathbb{N}$ $\delta_k(n)$ *vale 1 per* $k = n$ *e* 0 *altrimenti.*

Esercizio 4. 1. *Usando il Lemma di Zorn, si dimostri che ogni spazio vettoriale finito con un prodotto scalare non banale su di esso, ammette una base di Hilbert (i.e.: un sistema ortonormale massimale). (Ricordiamo l'enunciato del Lemma di Zorn:" Dato un insieme X non vuoto e parzialmente ordinato, se ogni catena di elementi di X ammette maggiorante, allora X ammette elementi massimali.")*

2. *Mostrare con un controesempio che la finitezza dello spazio vettoriale è un'ipotesi irrinunciabile.*

Esercizio 5. *Si mostri che tutte le isometrie sono iniettive.*