Tutorato7 GE210

DOCENTE: FILIPPO VIVIANI. ESERCITATORE: VALERIO TALAMANCA.
TUTORI: GAUDENZIO FALCONE, GIOVANNI PASSERI.
MERCOLEDÌ 6 DICEMBRE 2017.

Esercizio 1. *Dire quali dei seguenti operatori lineari*

$$T : V \to V$$

sono normali

1. $V = \mathbb{R}^3$,
$$T((x, y, z)) := (x - y, x + z, z + y)$$

2. $V = \mathbb{R}_{<4}[X]$,
$$T(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) := a_0 + 2a_1 + (2a_0 + a_1)X + a_3X^2 + a_2X^3$$

3. $V = \mathbb{C}$ *(inteso come* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale) (ricordiamo che* $\mathbb{Q}[i] = \{x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$*)*
$$T(x + iy) := x - 3y + 3ix + iy$$

4. $V = \mathbb{R}^6$,
$$T((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)) := (x_2, x_1, -x_3 + 2x_4, 3x_3 - x_4, x_6, x_5)$$

Esercizio 2. *Dire quali dei seguenti operatori lineari* T *definiti sullo spazio vettoriale* V *sono autoaggiunti.*

1. $V = \mathbb{C}^2$,
$$T((a, b)) := (a + ib)e_1 + (a - ib)e_2$$

2. $V = \mathbb{R}_{<3}[X]$,
$$T(a + bX + cX^2) := a + 2b + (2a + c)X + bX^2 - cX^3$$

3. $V = \mathbb{C}_{<3}[X]$,
$$T(a_0+a_1X+a_2X^2) := a_0+ia_2+(3a_1+(3+i)a_2)X+(-ia_0+(3-1)a_1)X^2$$

4. $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, *(inteso come* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale)*
$$T(a + ib, c + id) := (a + d + i(-b - c + 3d), -b + 5c + i(a + 3b + d))$$

Esercizio 3. *Dire quali dei seguenti operatori lineari* T *sullo spazio vettoriale* V*, ammettono una base ortonormale diagonalizzante e - quando questo avviene - esibirne una.*

1. $V = \mathbb{C}_{<3}[X]$,

$$T(a_0 + a_1X + a_2X^2) := a_0 + (3-i)a_2X + (3-i)a_1X^2$$

2. $V = \mathbb{R}^3$,

$$T((x, y, z)) := (x + 2y, 2x + 4y, z)$$

3. $V = \{M \in M_2(\mathbb{C}) :^T M = M\}$,

$$T(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 2a & 2b - i\sqrt{3}c \\ 2b - i\sqrt{3}c & bi\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

4. $V = \mathbb{R}_{<3}[X]$,

$$T(a_0 + a_1X + a_2X^2) := a_0 + 2a_2 + a_1X + (2a_0 + a_2)X^2$$

5. $V = \mathbb{R}_{<4}[X]$,

$$2a_0 + 2a_2 + a_1X + 2a_0X^2 + a_3X^3$$

6. *V lo spazio vettoriale degli operatori autoaggiunti $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,*

$$T(e_1 \mapsto ae_1 + b_2, e_2 \mapsto be_1 + ce_2) := (e_1 \mapsto (a+c)e_1 + (b-2c)e_2, e_2 \mapsto (b-2c)e_1 - 2be_2)$$

Esercizio 4. *Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, l'operatore lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale diagonalizzante e, per i suddetti valori, esibirne una.*

$$T_k((x, y, z)) := (x + (k^2 - 1)y, 2y + \frac{3}{2}z, \frac{3}{2}y + z)$$

Esercizio 5. *Trovare un valore, se ne esistono, per cui $T : \mathbb{C}_{<3}[X] \to \mathbb{C}_{<3}[X]$, definita da*

$$T(a_0 + a_1X + a_2X^2) := a_0 + ia_1 + a_0X + (k^2a_0 + \sqrt{3}a_2)X^2$$

ammette una base ortonormale diagonalizzante ed esibirne una.