# GE210 - Geometria 2: Tutorato 8

Docente: Filippo Viviani
Tutori: Gaudenzio Falcone, Giovanni Passeri
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

13 Dicembre 2017

**Esercizio .1.** *Stabilire se gli operatori con le seguenti matrici associate definiscono un prodotto scalare su* $\mathbb{R}$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio .2.** *Dimostrare che un operatore normale su uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto interno è auto-aggiunto se e solo se tutti i suoi autovalori sono reali.*

**Esercizio .3.** *Assumiamo che* $T \in End(\mathbb{R}^3)$ *sia un operatore lineare tale che* $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,-1,0),(0,1,-1)\}$ *sia una sua base di autovettori corrispondenti agli autovalori* $a, b, c$*. Provare che* $T$ *è auto-aggiunto se e solo se* $b = c$*.*

**Esercizio .4.** *Sia* $T$ *un operatore lineare su uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto interno. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

*(a)* $T$ *è normale*

*(b) Ogni sottospazio* $T$*-invariante è* $T^*$*-invariante*

*(c) Se* $U$ *è un sottospazio* $T$*-invariante allora* $T^{\perp}$ *è* $T$*-invariante.*

**Esercizio .5.** *Dimostrare che se* $dim(V) \geq 2$ *allora l'insieme degli operatori normali su* $V$ *non costituisce un sottospazio vettoriale di* $End(V)$*.*

**Esercizio .6.** *Dare un esempio di un operatore lineare* $T$ *su uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno tale che* $T$ *abbia un sottospazio invariante il cui ortogonale non è invariante per* $T$*.*

**Esercizio .7.** *Dimostrare o confutare la seguente affermazione:*

*l'operatore identità su* $\mathbb{K}^3$ *ha infinite radici quadrate auto-aggiunte.*

**Esercizio .8.** *Dimostrare che, se* $T \in End(V)$ *è un operatore positivo su* $V$ *allora* $T^k$ *è un operatore positivo per ogni* $k \in \mathbb{Z}$.

**Esercizio .9.** *Assumiamo che* $T \in End(V)$ *sia un operatore positivo su un* $K$ *spazio vettoriale* $V$ *dotato di prodotto interno* $<,>$ *e definiamo* $[,] : V \times V \to K$ *tale che* $[v, w] =< T(v), w >$. *Provare che* $[,]$ *ùn prodotto interno su* $V$. *Consideriamo poi un operatore* $S \in End(V)$ *dove con* $S^*$ *indichiamo l'aggiunto di* $S$ *rispetto a* $[,]$, *provare che* $S^* = T^{-1}S^*T$.

**Esercizio .10.** *Sia* $T \in End(\mathbb{K}^3)$ *con* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *l'operatore definito da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, 2x_1, 3x_2)$$

*trovare esplicitamente una decomposizione polare per* $T$ *ossia trovare una isometria* $S \in End(V)$ *tale che* $T = S\sqrt{T^*T}$. *Fare la stessa cosa per l'operatore* $T \in End(\mathbb{R}^3)$ *definito dalla matrice* $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.