Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO A DEL CORSO GE220
(4 GIUGNO 2012)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente.

ESERCIZIO 1 (7 punti) Dato uno spazio topologico X e un sottoinsieme A di X, si denoti con $\overline{A}$ la chiusura di A.

Si dimostri che dati due sottoinsiemi A e B di X si ha che:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \tag{1}$$

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}. \tag{2}$$

Trovare due sottoinsiemi della retta euclidea $\mathbb{R}$ per cui l'inclusione nell'equazione (2) non è un'uguaglianza.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Si considerino i seguenti intervalli della retta euclidea $\mathbb{R}$, muniti della topologia di sottospazio:

$$A = (0, 1),$$
$$B = [0, \infty),$$
$$C = [-1, 0].$$

Per ciascuna coppia di intervalli, dire se si tratta di spazi topologici omeomorfi o no, giustificando la risposta.

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (come al solito $[a.b] \subset \mathbb{R}$ è munito della topologia di sottospazio). Dimostrare che:

(i) (5 punti) Se r è un numero reale tale che $f(a) \leq r \leq f(b)$ allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = r$.
(ii) (5 punti) Esistono $d, e \in [a, b]$ tale che $f(e) \leq f(x) \leq f(d)$ per ogni $x \in [a, b]$.

ESERCIZIO 4 (18 punti)

Sia $X = [0, 1]/\sim$, dove $[0, 1]$ ha la topologia euclidea e $\sim$ è la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \{0, 1/2, 1\}$.

(i) (5 punti) Dire se X è Hausdorff e/o compatto (giustificando la risposta).
(ii) (7 punti) Dimostrare che X è omeomorfo al wedge di due circonferenze.
(iii) (6 punti) Usando il teorema di van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale di X.