Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO B DEL CORSO GE220
(3 LUGLIO 2012)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente, altrimenti non verranno prese in considerazione.

ESERCIZIO 1 (12 punti) Sia $f : X \twoheadrightarrow Y$ una mappa quoziente tra spazi topologici e assumiamo che X sia di Hausdorff. Dimostrare che:

(i) (6 punti) Se f è chiusa e $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$ allora Y è di Hausdorff.

(ii) (6 punti) Se X è compatto, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) Y è di Hausdorff;
   (b) f è chiusa;
   (c) Il sottoinsieme $\{(x_1, x_2) \in X \times X \ : \ f(x_1) = f(x_2)\}$ è chiuso in $X \times X$.
   [Suggerimento: usare il punto (i)]

ESERCIZIO 2 (8 punti) Sia $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una mappa continua (come al solito, $[0, 1]$ è munito della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$). Dimostrare che f ammette un punto fisso, cioè esiste $x \in [0, 1]$ tale che $f(x) = x$.

ESERCIZIO 3 (12 punti) Sia $X = (0, 1)$ munito della topologia i cui aperti sono X, $\emptyset$ e gli intervalli $U_n := \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$ per $n = 2, 3, 4, \ldots$.

(i) (4 punti) Dire se X è T_0, T_1, T_2(=Hausdorff), T_3, regolare, T_4, normale.
(ii) (4 punti) Dire se X è connesso o localmente connesso.
(iii) (4 punti) Dire se X è compatto o localmente compatto.

ESERCIZIO 4 (12 punti)
Si consideri l'azione di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$ data da

$$(n, m) \cdot (x, y) := (x + n, y + m) \text{ per ogni } n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } x, y \in \mathbb{R}.$$

(i) (4 punti) Dimostrare che l'azione sopre descritta è libera e propriamente discontinua.
(ii) (4 punti) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
(iii) (4 punti) Dimostrare che $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.