Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO C DEL CORSO GE220

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente.

ESERCIZIO 1 (12 punti) Siano X_1 e X_2 due spazi topologici e sia A_i un sottoinsieme compatto di X_i (per $i = 1, 2$). Dimostrare che per ogni sottoinsieme aperto $W \subseteq X_1 \times X_2$ tale che $A_1 \times A_2 \subseteq W$, esistono sottoinsiemi aperti $U_i \subseteq X_i$ (per $i = 1, 2$) tale che $A_1 \times A_2 \subseteq U_1 \times U_2 \subseteq W$.

[Suggerimento: dimostrare prima il caso speciale in cui A_1 consiste di un punto.]

ESERCIZIO 2 (12 punti)

Sia $f : X \to Y$ una mappa quoziente tra spazi topologici e assumiamo che X sia compatto e di Hausdorff. Dimostrare che Y è di Hausdorff se e solo se f è una mappa chiusa.

ESERCIZIO 3 (12 punti)

Sia d la distanza euclidea su $\mathbb{R}^2$ e $\underline{0}$ l'origine di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo la funzione $d^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da

$$d^*(x, y) = \begin{cases} d(x, \underline{0}) + d(\underline{0}, y) & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Dimostrare che:

(i) (3 punti) d^* è una metrica su $\mathbb{R}^2$.

(ii) (3 punti) La topologia τ_{d^*} indotta da d^* è più fine della topologia euclidea τ_d indotta da d; tuttavia $\tau_{d^*} \neq \tau_d$.

Dire se:

(a) (3 punti) $\mathbb{R}^2$ munito della topologia τ_{d^*} è Hausdorff o compatto.

(b) (3 punti) d^* è completa o totalmente limitata.

ESERCIZIO 4 (16 punti)

Si consideri l'azione di $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su $\mathbb{S}^n$ (con $n \geq 1$) tale che l'azione del generatore i di $\mathbb{Z}_2$ è data da:

$$\begin{aligned} i : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto -x. \end{aligned}$$

(i) (4 punti) Dimostrare che l'azione sopre descritta è libera e propriamente discontinua.

(ii) (4 punti) Dimostrare che $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ è una varietà topologica.

(iii) (4 punti) Dimostrare che $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

(iv) (4 punti) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 1$.