Nome candidato:

APPELLO X DEL CORSO GE220
(4 SETTEMBRE 2012)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente, altrimenti non verranno prese in considerazione.

ESERCIZIO 1 (14 punti)

(i) (8 punti) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e Y uno spazio topologico. Dimostrare che la proiezione sul secondo fattore $p_2 : X \times Y \to Y$ è una mappa chiusa.

(ii) (6 punti) Dimostrare che la proiezione sul secondo fattore $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non è una mappa chiusa.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Sia X uno spazio compatto di Hausdorff. Dimostrare che X è metrizzabile se e solo se X è II numerabile.

ESERCIZIO 3 (14 punti)

Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Si chiama *componente quasi-connessa* di x, e si denota con Q_x, l'intersezione di tutti i sottoinsiemi aperti e chiusi di X che contengono x. Si chiama componente quasi-connessa di X un sottoinsieme di X della forma Q_x, per qualche $x \in X$. Dimostrare che:

(i) (4 punti) Le componenti quasi-connesse di X formano una partizione di X in sottoinsiemi chiusi a due a due disgiunti.

(ii) (4 punti) Per ogni $x \in X$, si denoti con C_x la componente connessa di $x \in X$. Dimostrare che $C_x \subseteq Q_x$.

(iii) (6 punti) Si consideri il sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$ formato dai segmenti $I_i := [0,1] \times \{1/i\}$ per $i \in \mathbb{N}$ e dai punti $p_0 = (0,0)$ e $p_1 = (1,0)$. Si calcolino le componenti connesse e quasi-connesse di X.

ESERCIZIO 4 (14 punti)

Sia $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera n-dimensionale (con $n \geq 1$). Si consideri la relazione d'equivalenza $\sim$ definita da

$$x \sim y \Longleftrightarrow y = \pm x.$$

Dimostrare che:

(i) (4 punti) La mappa quoziente $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\sim$ è un rivestimento.

(ii) (4 punti) $\mathbb{S}^n/\sim$ è una varietà topologica.

(iii) (6 punti) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{S}^n/\sim$.